

4.3 Die Ableitung einer Funktion

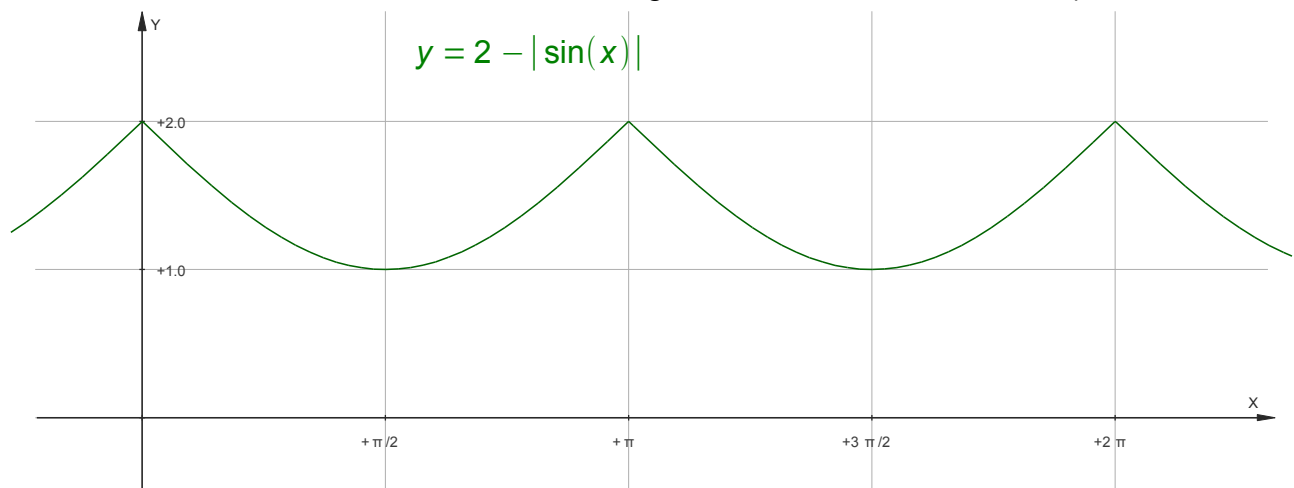
4.3.1 Ableitung und Differentialquotient

In [421] wurde als eine wichtige Eigenschaft von Funktionen (z.B. für ihre Anwendbarkeit in der Ingenieurskunst) die *Stetigkeit* diskutiert. Salopp gesagt lässt sich der Graph einer Funktion überall dort, wo sie stetig ist, „ohne Absetzen des Stiftes“ zeichnen.

Ganz klar *nicht* stetig ist eine Funktion dort, wo sie *nicht definiert ist* (unabhängig davon, ob es sich an dieser Stelle „nur“ um eine Lücke oder um einen Pol oder etwas ganz anderes handelt), aber auch dort, wo sie zwar definiert ist, aber „einen Sprung“ macht (denn „dazu muss man den Stift ja absetzen!“).

Hier soll es nun um einen weiteren, für das ganze Gebiet der Analysis aber auch für viele Gebiete in der Physik fundamentalen Begriff, nämlich die *Ableitung* einer Funktion gehen.

Betrachten wir folgende sehr schön anzusehende Kurve, es handelt sich um eine Sinuskurve, jedoch mit einem Betrag versehen (die „Verschiebungen“ sind nur gewählt worden, damit die „Zacken“ nicht auf der x -Achse liegen und man sie besser sieht.)



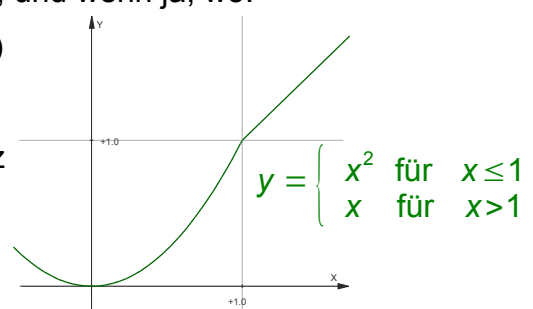
Diese Funktion ist selbstverständlich überall stetig, und man kann die Kurve auch „in einem Zug zeichnen“, aber beim Zeichnen bemerkt man, dass man in jedem Zacken „langsamer wird“ und „für einen Moment stehen bleibt“, bevor man den nächsten Bogen zeichnet. Physikalisch sind solche Bewegungsmuster sehr wichtig: eine „abrupte Richtungsänderung“ ist nicht möglich, man müsste sonst eine „unendliche Beschleunigung“ hinlegen (Richtungsänderung pro Zeit, wenn das Zeitintervall, in welcher diese Änderung geschieht, nur aus „einem Augenblick“ bestehen würde.)

Solche „Ecken“ oder „Zacken“ im Graph einer (stetigen) Funktion sind also ebenfalls wichtige Eigenschaften der Funktion, und die Frage ist, wie man sie nachweisen kann (man vergisst in der heutigen Zeit – in welcher mit Computerhilfe der Graph einer Funktion ebenfalls „in einem Augenblick“ generiert werden kann – oft, dass dies erst seit kurzem möglich ist und sich die Epochen vor unserer Zeit dieses Bild immer erst erarbeiten mussten.) Es geht hier also *nicht* darum, ein Bild anzusehen und herauszufinden, „ob es gezackt ist oder nicht“, sondern bei einer (z.B. nur als Funktionsvorschrift gegebenen) Funktion zu begründen, ob ihr Graph solche Ecken besitzt, und wenn ja, wo.

Wie lässt sich nun also so eine Ecke (auch ohne Bild) „entdecken“?

(Man darf nicht vergessen, dass so eine Ecke auch viel weniger „spitz“ sein kann, es könnte z.B. ein ganz leichter, von Auge nicht erkennbarer (!) Knick sein.)

Hier ist der Knick jedoch zu erkennen:



Diese Kurve ist überall, auch an der Stelle 1, stetig (wo sie die Definition wechselt). Es ist jedoch ein „Bruch“ zu erkennen, die Kurve ist dort „nicht glatt“, auch wenn die Ecke überhaupt nicht spitz ist (es handelt sich übrigens um einen Winkel von 161.6° , ebenfalls eine Frage, die man mit Hilfe der Ableitung beantworten kann).

Wenden wir uns dem *Gegenteil* zu: wann finden wir, dass der Graph einer Funktion an einer Stelle (bzw. in einer Umgebung davon) „glatt“, also „ohne Ecken“ ist? Das bekannteste Objekt „ohne Ecken“ in der Geometrie ist der Kreis (obwohl „es hat keine Ecken“ nun wirklich keine sehr gute Definition für einen Kreis wäre, hört man genau diese Formulierung hin und wieder. Genauso gut könnte man sagen „er ist rund“.)

Dass der Kreisumfang „keine Ecken hat“ könnte man z.B. dadurch genauer formulieren, dass man beschreibt, was passiert, wenn man die Umgebung eines Punktes auf dem Kreis immer stärker vergrößert: Sie sieht immer mehr aus wie eine Gerade (Vergleiche auch mit dem Menschen auf der Erdoberfläche, der den kleinen Ausschnitt der Umgebung, die er wahrnimmt, eher als Ebene denn als gekrümmte Fläche bezeichnen würde und lange auch hat...)

Meist wird die Geschichte der Ableitung anders erzählt, nämlich, dass man den Graphen einer Funktion in der Umgebung eines Punktes „linear approximieren“ möchte. Oder einfach, dass man „an den Graphen eine Tangente legen möchte“. Wobei ich mich dann immer gefragt habe, wozu denn eigentlich...

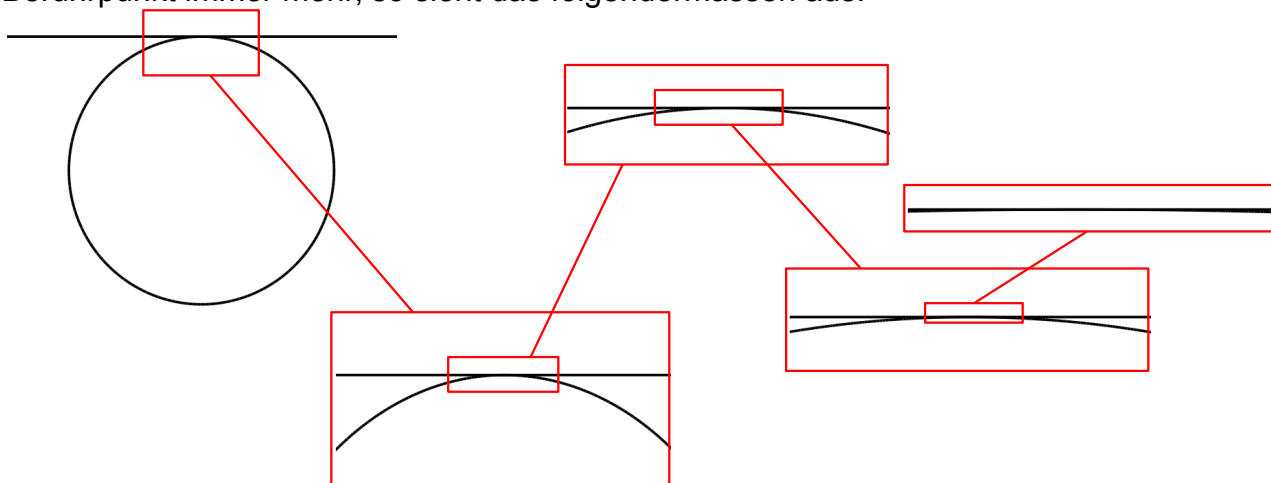
Tangente an den Graphen einer Funktion

Die Tangente ist in der elementarsten Geometrie zunächst nur für den Kreis definiert, als *eine Gerade*, die mit dem Kreis *genau einen Punkt gemeinsam hat*. (Wörtlich (Euklid: Buch III der Elemente, Definition 2): „Sie trifft den Kreis, *ohne ihn verlängert ein weiteres Mal zu schneiden*.“)

Tatsächlich ist, wie Euklid in seiner Strenge beweist, eine Gerade genau dann tangential an den Kreis, wenn sie auf der Verbindung Mittelpunkt - Berührungspunkt senkrecht steht, er zeigt weiter, dass umgekehrt eine solche Gerade den Kreis nicht noch einmal schneidet, also dass es eine Tangente ist, und, (in Satz 15,) *dass es keine weitere solche Gerade durch denselben Punkt des Kreises geben kann*, in jedem Punkt des Kreises *gibt es also eine und nur eine* Tangente.

Schon bei der Parabel lässt sich die Definition einer Tangente nicht mehr so einfach formulieren. Denn jede senkrechte Gerade schneidet z.B. die Standardparabel nur in einem Punkt, diese würden wir jedoch niemals als Tangente bezeichnen! (Eine Möglichkeit ist also zu definieren: „Als Parabeltangente bezeichnet man eine Gerade, die *nicht parallel zur Parabelachse verläuft*, und mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam hat“. Es ist aber sehr unschön, dass man diese Ausnahme in die Definition nehmen muss. Gibt es keine andere Möglichkeit?)

Betrachten wir eine Tangente an einen Kreis, und vergrößern wir den Ausschnitt um den Berührungspunkt immer mehr, so sieht das folgendermassen aus:



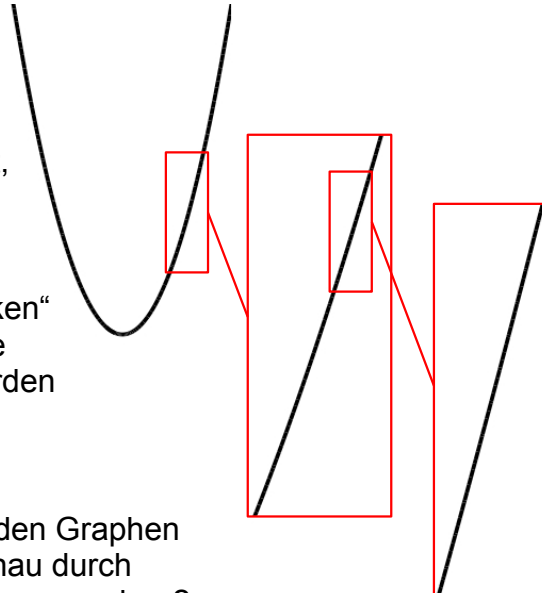
Weil die „genügend stark vergrösserte“ Umgebung eines Punktes auf einem Kreis „wie eine Strecke“ aussieht, kann man „so tun, als ob es diese Strecke geben würde, und sie auf beide Seiten verlängern“. Natürlich funktioniert das so nicht, aber zwei Dinge kann man doch festhalten: Wenn man eine Gerade durch diesen Punkt nimmt, die *nicht* die von Euklid eindeutig definierte und als existierend bewiesene Tangente ist, so würde man, egal wie stark man vergrössert, immer zwei sich kreuzende Linien sehen! Und zweitens ist die Idee „genügend stark zu vergrössern“, bzw. „genügend nahe heranzugehen“, genau die Idee eines Grenzüberganges, wie sie bereits für die Stetigkeit gute Dienste geleistet hat.

Machen wir dasselbe bei einem beliebigen Punkt auf einer Parabel:

Hier ist noch keine „Tangente“ eingezeichnet, weil ja noch nicht klar ist, was damit gemeint sein soll. Dennoch ergibt sich auch hier:

Der Graph einer stetigen Funktion „ohne Ecken“ sieht in „genügend kleinen Ausschnitten“ (die dann natürlich entsprechend vergrössert werden müssen, damit man überhaupt etwas sieht) aus wie eine „gerade Strecke“.

Könnte man ins gleiche Koordinatensystem den Graphen einer linearen Funktion einzeichnen, die „genau durch diese Strecke“ verläuft? Wie müsste man dazu vorgehen?



Für eine lineare Funktion ($y = mx + q$) genügt es, zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zu kennen, die auf ihrem Graph liegen.

Denn mithilfe des *Differenzenquotienten* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bestimmt man die *Steigung* m der Geraden, und durch Einsetzen eines der Punkte (also seiner Koordinaten) erhält man auch noch den y – Achsenabschnitt q .

Da die Parabel natürlich „überall gekrümmt“ ist, kommt es sehr darauf an, „in welchem Punkt“ wir die Vergrösserung vornehmen (also „wo wir hineinzoomen“). Diesen Punkt, der uns sozusagen interessiert, können wir auch als einen der beiden Punkte verwenden.

Aber was ist mit dem *zweiten Punkt*? Es ist ein Dilemma:

- Wir *müssen* einen *anderen* Punkt wählen, weil sonst der Differenzenquotient Null über Null lautet und somit nicht definiert ist.
- *Wenn* wir aber einen anderen Punkt auf der Parabel wählen, weicht die Gerade unweigerlich von der eigentlich gesuchten Geraden ab, weil die Parabel eben *nicht* wie eine Gerade „mit immer derselben Steigung weiterläuft“.

(Tatsächlich kommt es bei einer Geraden eben genau *nicht* darauf an, welche zwei Punkte man wählt, solange es zwei verschiedene sind. Umgekehrt entsteht bei der Parabel bei jeder *anderen* Wahl zweier Punkte ganz sicher auch eine *andere Gerade*! Eine Parabel enthält *keine drei Punkte*, die auf derselben Geraden liegen!)

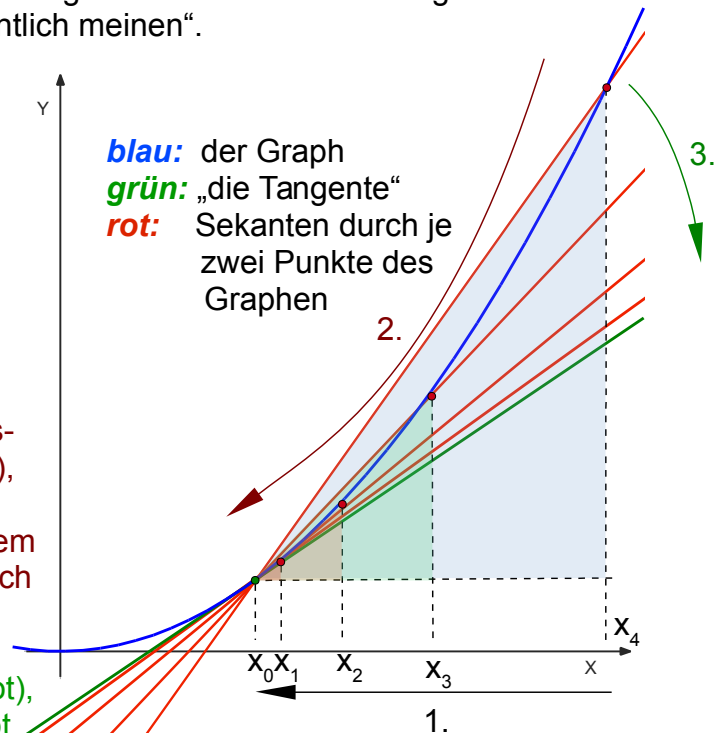
Und noch ein seltsamer Gedanke schiesst mir gerade durch den Kopf: Wieso wählen wir den zweiten Punkt überhaupt auf der Parabel? Wählen wir ihn doch auf der Tangente, und das Problem ist gelöst. Nur: genau diese Tangente (so klar wir sie vor uns zu sehen meinen!) haben wir ja nicht. Wir suchen sie. Aber das nur nebenbei – daher auch kleingedruckt.

Das Dilemma wird nun mit einem Grenzwert „erledigt“. Diese Idee ist überhaupt nicht „zwingend“, und es ist auch nur scheinbar so, dass es „ja klar ist, dass dies funktioniert“ (falls das jetzt jemand denken sollte).

Klar ist lediglich: Die beiden Punkte dürfen nicht gleich sein (Division durch Null droht!), aber je weiter sie auseinanderliegen, desto grösser ist die Abweichung der entstehenden Geraden von der „Geraden, die wir eigentlich meinen“.

Deshalb behilft man sich mit folgendem **Grenzübergang**:

1. Der x – Wert des zweiten Punktes wird zunächst beliebig, aber ungleich desjenigen des ersten Punktes (x_0) gewählt. Nun *lässt man diesen x – Wert näher an x_0 gehen*.
2. Der y – Wert ist jeweils der Funktionswert an der entsprechenden Stelle (x_i), die Punkte (rot) liegen also auf dem Graphen. Wenn sich die x – Werte dem x_0 nähern, nähern sich die Punkte auch dem ersten Punkt.
3. Dadurch nähern sich die Sekanten (rot), falls es ein „Konvergenzverhalten“ gibt, der Grenzlage (grüne Gerade.)



Und *falls* dieses Verfahren zu einem Konvergenzverhalten führt, so könnte man die „Grenzlage“ der Sekanten als „Tangente“ bezeichnen, und hätte somit eine brauchbare **Definition** für diesen Begriff.

Betrachte die (im Bild farbig hinterlegten) **Steigungsdreiecke**: Sie werden natürlich immer kleiner, aber man erkennt auch, dass sich der **Steigungswinkel** ebenfalls verkleinert. Je näher die roten Punkte dem grünen Punkt kommen, desto „langsamer“ wird diese Änderung, und *falls* die Winkelgrössen eine **konvergente Folge** bilden, könnte man den Grenzwert als den **Steigungswinkel der Kurve in diesem Punkt** bezeichnen.

Zur Erinnerung: Es geht um die Steigung einer Geraden durch zwei Punkte auf dem Graphen einer Funktion, wobei der eine Punkt fest gewählt ist, und der zweite Punkt ein anderer Punkt sein muss, aber immer näher an den ersten Punkt geschoben werden soll.

Es ist also zunächst $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ der **Differenzenquotient** zwischen diesen beiden Punkten, jedoch kann man für die y – Werte auch $f(x)$ schreiben, weil ja die Punkte auf dem Graphen der Funktion liegen. Also: $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Nun lässt man x_1 (das sich dauernd ändert, deshalb wird es im Folgenden schlicht mit x , also ohne Index, bezeichnet, gegen x_0 laufen. *Falls* der Wert des Differenzenquotienten dabei konvergiert, so nennt man den Grenzwert **Differentialquotient**: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Da sich Grenzwerte leichter berechnen lassen, wenn **Nullfolgen** vorkommen, gibt es auch den Trick, dass man die „horizontale Differenz“ zwischen x und x_0 mit h bezeichnet, also: $h = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$. Setzt man dies ein, erhält man eine andere Schreibweise für den Differentialquotient, der manchmal einfacher zu berechnen ist (je nach Aufgabe):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(Beachte, dass natürlich h gegen Null geht, wenn x gegen x_0 geht.)

Dies wird nun einfach als Definition gesetzt:

Ableitung und Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle, Differentialquotient

Sei $y = f(x)$ eine Funktion. Der Ausdruck $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ heisst **Differentialquotient** dieser Funktion **an der Stelle** x_0 .

Falls dieser Grenzwert existiert, heisst die Funktion an dieser Stelle **differenzierbar** und der Grenzwert **Ableitung** dieser Funktion an dieser Stelle. Man schreibt dafür auch $f'(x_0)$, gelesen als „f Strich von x Null“.

Bemerkungen:

- Der Differenzenquotient (also der Ausdruck *ohne* den Limes) ist an der Stelle x_0 bzw. für $h = 0$ *nicht definiert*. Also genau dort, wo der Wert des Terms gefragt ist. Deshalb braucht es ja auch den Limes: Man kann *nicht* x_0 bzw. $h = 0$ in den Term einsetzen, aber trotzdem könnte der *Grenzwert* existieren. Das ist jedoch nicht sicher, deshalb bezeichnet man die Funktion, wenn er existiert, an dieser Stelle als *differenzierbar*.

Die Ableitungsfunktion ist keine Ableitung

Genau wie Stetigkeit ist auch Differenzierbarkeit *punktwise* definiert: Eine Funktion hat an *einer Stelle* eine Ableitung, wenn der Differentialquotient existiert.

Natürlich darf man auch *zu jeder beliebigen Stelle* einer Funktion angeben, ob die Ableitung existiert und wie gross sie an dieser Stelle ist. Dann ergibt sich eine *Funktion*, welche zu jeder Stelle die Ableitung liefert. Man nennt sie sinnigerweise die *Ableitungsfunktion* und bezeichnet sie mit $y' = f'(x)$.

Man unterscheide aber gut: die Ableitungsfunktion ist eben eine *Funktion*, eine Ableitung jedoch ist eine *Zahl*, welche geometrisch eine *Steigung* bedeutet.

Setzt man in eine *Ableitungsfunktion* eine Stelle ein, so erhält man eine Ableitung.

Und noch etwas zu Schreibweisen: Der *Differenzenquotient* für die Steigung wird ja oft (weil es sich schneller aussprechen und leichter merken lässt) mit Hilfe von Deltas (griechische Grossbuchstaben als Abkürzung für Differenz) geschrieben. Im Grenzwert (die Steigungsdreiecke werden ja kleiner und kleiner) werden aus den grossen Deltas kleine lateinische d 's: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ (Schreibweise nach Leibniz, während f' auf Lagrange zurückgeht). Deshalb liest man auch manchmal $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$. Beim *Integral* [441] wird uns dieses sogenannte **Differential** dx wieder begegnen, dort wird aus dem „durch dx “ des Ableitens Formal ein „mal dx “ des Integrierens.

Newton entwickelte die Differential- und Integralrechnung *zur gleichen Zeit* wie Leibniz (aber keiner wusste von den Arbeiten des anderen, so dass es grossen Streit gab, als sie voneinander erfuhren!). Er schrieb die Ableitung mit einem *Punkt* über der Variablen ($\dot{x}$), was heute noch in der Physik als „Ableitung nach der Zeit“ ($\frac{dx}{dt}$) verwendet wird.

Die Ableitung wird also tatsächlich unabhängig vom Begriff der Tangente definiert (was die Handhabung erleichtert!), und dieser stattdessen umgekehrt *mit Hilfe* der Ableitung:

Tangente an den Graphen einer Funktion in einem Punkt des Graphen

Für jeden Punkt des Graphen einer Funktion wird diejenige Gerade als **Tangente** bezeichnet, welche durch diesen Punkt verläuft und *dieselbe Steigung* hat wie die Ableitung der Funktion an dieser Stelle.

Bemerkungen:

- Man mache sich klar, dass es tatsächlich für jeden Punkt nur *eine* solche Gerade geben kann, mit anderen Worten, dass „die Tangente in einem Punkt eines Graphen“ *eindeutig* definiert ist (sonst wäre es keine gute Definition!).
- Insbesondere wird *nichts* darüber gesagt, ob diese Gerade den Graphen an anderen Stellen nicht schneiden könnte. Dass „die Gerade die Kurve an *keiner anderen Stelle* schneidet“ ist also überhaupt nicht verlangt für eine auf obige Weise definierte Tangente (und wie wir sehen werden, sind solche Schnittpunkte, wenn sie existieren, sogar interessant).
- Wie oft in der Mathematik hat man zu einer zunächst „intuitiv klaren“ Vorstellung eine „technische“ Definition finden können, die für alle „einfachen“ Fälle genau das „erwartete“ Resultat liefert. Es lohnt sich, nachdem man etwas neu definiert hat, nach Spezialfällen zu suchen, in welchen die Definition z.B. eine Gerade, die wir spontan als Tangente bezeichnen würden, nicht als solche zulässt oder umgekehrt Geraden zulässt, die dem intuitiven Begriff widersprechen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die Definition anpassen (Sonderfälle ausschliessen, strengere Bedingungen stellen etc.) oder, was in der Mathematik nicht selten passiert, davor zu warnen, dass die Definition nicht identisch ist mit der „intuitiven“ Vorstellung dieses Begriffs!

Und was hat das nun mit den Ecken und Knicken zu tun, die wir nicht wollen? An einer winzigkleinen Stelle (und daher leicht zu übersehen) in der Definition des Differentialquotienten steht, dass „wenn eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist, sie dort keinen Knick hat“.

Wirklich? Wo denn? Man beachte, dass der Grenzwert „für x gegen x_0 “ ein *beidseitiger* Grenzwert ist. Er existiert also nur, wenn *von beiden Seiten kommend* die Sekanten gegen *dieselbe* Grenzlage gehen. Bei einem Knick, also *im Punkt, der die Ecke ist*, ist diese Grenzlage jedoch von beiden Seiten verschieden, darum sprechen wir ja genau von einem „Knick“.

Müssten wir das nicht beweisen? Nein! Wir haben jetzt definiert, was differenzierbar bedeutet, und bei Beispielen mit Ecken kann man selbst nachrechnen, dass dort die Grenzwerte *tatsächlich* nicht existieren (bzw. von beiden Seiten kommend verschieden sind). Dass es nicht „Ecken geben könnte“, die durch diese Definition durchschlüpfen, hat niemand behauptet und ist auch nicht so schlimm, es ist schliesslich „nur“ eine Definition und kein Satz (den müsste man natürlich beweisen).

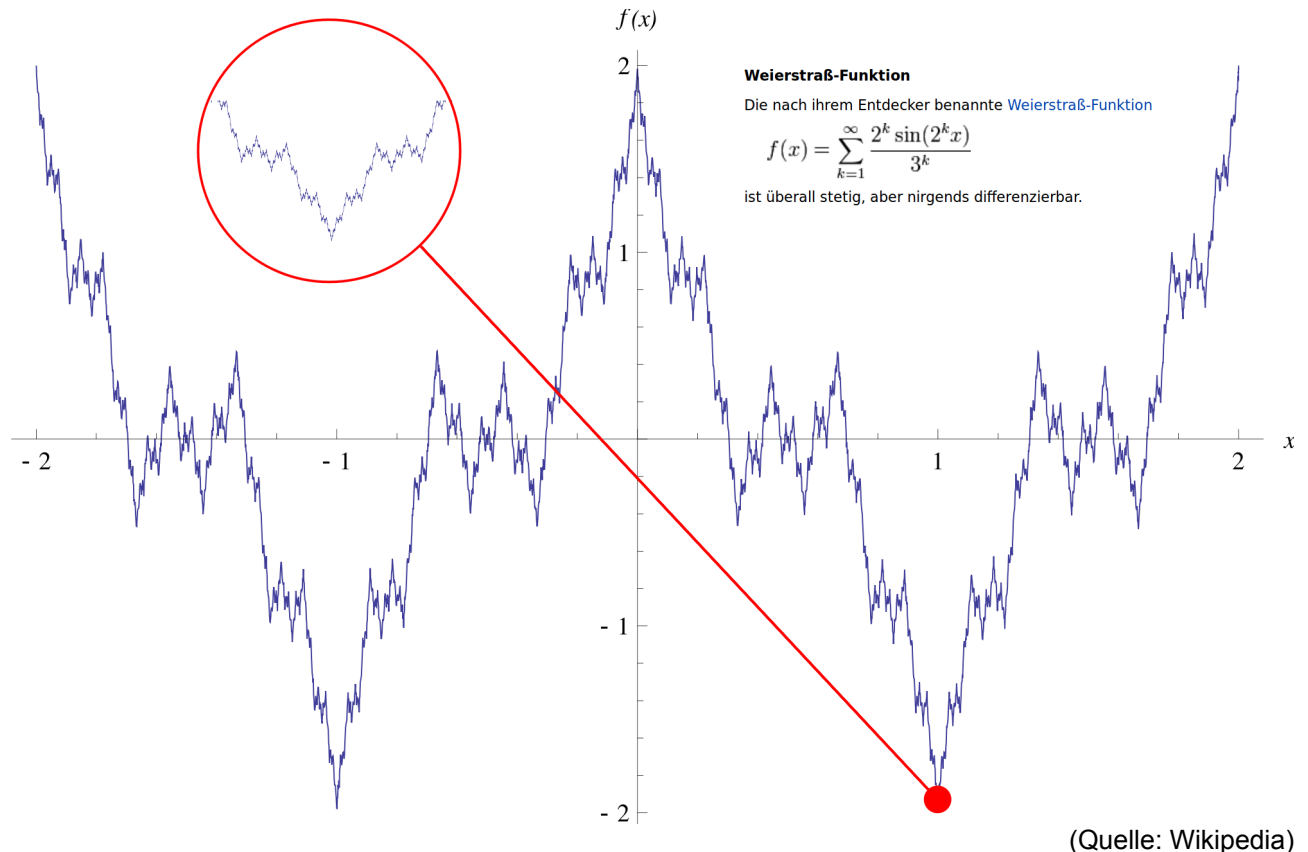
Die Suche nach einem „Kriterium für glatte Graphen (im Sinn von ohne Ecken)“ hat also zur Aussage geführt, dass man prüfen könnte, ob die Funktion dort differenzierbar ist.

Somit ist eine Funktion dort, wo sie nicht definiert ist, weder stetig noch differenzierbar, wo sie Sprünge hat ebenfalls nicht stetig und auch nicht differenzierbar, wo sie aber lediglich „Knicke“ hat, ist sie zwar stetig, aber *nicht differenzierbar* (ohne Beweis! Wie im Kleingedruckten erwähnt, könnte es ja „raffinierte Knicke“ geben, wo dennoch differenziert werden könnte.)

Es lässt sich nicht leugnen, wir sind auf einer Ebene der Mathematik angekommen, wo es schon recht abstrakt wird („definieren, was *keine* Ecke sein soll, aber nicht beweisen, dass dann wirklich jede Ecke diese Definition *nicht erfüllt*“). So anschaulich „die Steigung“ einer Kurve in einem Punkt sein mag, scheint die Geschichte eben nur, solange man „harmlose“ oder eben „Schulbuchbeispiele“ betrachtet:

Genau wie bei der Stetigkeit die Dirichletfunktion als ein mögliches Beispiel konstruiert wurde für eine Funktion, die *in keinem Punkt stetig* ist (weil sie nämlich *in jedem Punkt* einen Sprung hat!), liessen sich auch Funktionen ausdenken, die *zwar überall stetig, aber nirgends differenzierbar* sind. Wie müsste so etwas aussehen? Tatsächlich: In einem Zug zu zeichnen, aber *in jedem Punkt* eine Ecke! Was wiederum das Zeichnen schwierig macht... (Beachte, dass all diese Formulierungen natürlich umgangssprachlich sind.)

Das folgende Beispiel einer solchen Funktion ist im Gegensatz zur Dirichletfunktion schwer zu verstehen und steht hier im Kleingedruckten nur als Gegenbeispiel zur „geschützten Welt des Schulalltags“:



Beachte den roten Kreis, wo eine Spitze dieses „unendlich fein zerklüfteten Gebirges“ vergrößert wird und nur *noch feinere* Zackenlinien zum Vorschein kommen (wer schon von Fraktalen gehört hat, kennt dieses Verhalten – es ist das exakte Gegenteil zum „glatt“ werden unserer Parabel bei Vergrößerung (siehe ganz zu Beginn)).

Was nicht stetig ist, kann nicht differenzierbar sein, aber was stetig ist muss nicht differenzierbar sein, oder wie man das mit Begriffen der Logik so gern unterscheidet:

Differenzierbar ist stärker als stetig

Stetigkeit ist eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für Differenzierbarkeit.

(Eine Bedingung heisst „stärker“ als eine andere, wenn sie diese nach sich zieht, also wenn die andere automatisch gilt, sozusagen immer mitgemeint ist. So wäre „nur für Bernhardiner“ eine stärkere Bedingung als „nur für Hunde“. Denn ein Bernhardiner ist immer bereits ein Hund, aber nicht jeder Hund ein Bernhardiner. Wo eine Funktion differenzierbar ist, muss sie schon stetig sein, aber eben nicht umgekehrt.

Wer Logik mag, überlege sich, dass Differenzierbarkeit also umgekehrt eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für Stetigkeit ist, aber das ist nicht so wichtig wie die Richtung im gelben Kästchen.)

Ableitung und Differentialquotient

Differentialquotient einer **Funktion** $y = f(x)$ an einer **Stelle** x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Falls dieser Grenzwert existiert, heisst die Funktion an dieser Stelle **differenzierbar** und der Grenzwert **Ableitung** dieser Funktion an dieser Stelle.

Man schreibt dafür auch $f'(x_0)$, gelesen als „f Strich von x Null“.

Tangente an den Graphen einer Funktion in einem Punkt des Graphen:

Gerade, welche **dieselbe Steigung** besitzt wie die Funktion an dieser Stelle **und durch diesen Punkt** verläuft.

Notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit: **Stetigkeit**