

Übungsaufgaben M 1

- 1) Bilde den **Differenzenquotienten** der Funktion $x \rightarrow y$ in der Umgebung von $x = a$; bringe ihn in eine möglichst einfache Form.

a) $y = 2x - 5$	b) $y = x^2$	c) $y = x^3$	d) $y = 3x^2 + 1$
e) $y = \frac{1}{x}$	f) $y = (2x+1)^2$	g) $y = \frac{1}{x^2}$	h) $y = 2\sqrt{x}$
- 2) Ermittle den **Differentialquotienten** der Funktionen von Aufgabe 1) an der Stelle $x = a$.
- 3) Berechne den Differentialquotienten (**die 1. Ableitung**) der Funktion an der Stelle $x = 1$.

a) $x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$	b) $x \rightarrow x^2 - 2x$	c) $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$	d) $x \rightarrow \frac{x}{x+1}$
-----------------------------------	-----------------------------	----------------------------------	----------------------------------
- 4) Bestimme die **1. Ableitungsfunktion** f' : $x \rightarrow y'$ der Funktion f : $x \rightarrow y$ (auch kurz 1. Ableitung genannt).

a) $f: y = x^2 + 3$	b) $f: y = 2x^3$	c) $f: y = \frac{x}{x-2}$
d) $f: y = \frac{x-2}{x}$	e) $f: y = \sqrt{x+3}$	f) $f: y = \sqrt{x^2 + 4}$
- 5) An welchen Stellen besitzt die Funktion $x \rightarrow f(x)$ keine Ableitung?

a) $f(x) = x $	b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$	c) $f(x) = [x]$
d) $f(x) = x-2 + x $	e) $f(x) = x^2 - 6x $	f) $f(x) = x+4 \cdot \operatorname{sgn}(x-3)$
- 6) Bestimme die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt P.

a) $x \rightarrow x^2$, $P(2/y_p)$	b) $x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x$, $P(1/y_p)$
c) $x \rightarrow x^3 + 2x$, $P(-2/y_p)$	d) $x \rightarrow \sqrt{x-3}$, $P(4/y_p)$
e) $x \rightarrow \frac{x+3}{2x}$, $P(1/y_p)$	f) $x \rightarrow \frac{x^2}{x-4}$, $P(6/y_p)$
- 7) In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f die Steigung $m = 1$?

a) $f: y = x^2 - 5x$	b) $f: y = x^3 - x^2$	c) $f: y = \frac{x-4}{x}$	d) $f: y = \sqrt{6x-3}$
----------------------	-----------------------	---------------------------	-------------------------
- 8) Ermittle $f'(x_0)$ einerseits durch $\lim_{x \rightarrow x_0}$, andererseits durch $\lim_{h \rightarrow 0}$.

a) $f: x \mapsto x^3$; $x_0 = 1$ ($x_0 = -2$; $x_0 = a$)	b) $f: x \mapsto -2x^3 + 1$; $x_0 = 0$ ($x_0 = -1$; $x_0 = a$)
c) $f: x \mapsto x^4$; $x_0 = 0$ ($x_0 = -2$; $x_0 = a$)	d) $f: x \mapsto 2x^4 + x$; $x_0 = 1$ ($x_0 = -0,5$; $x_0 = a$)
e) $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x_0 = 1$ ($x_0 = a$, $a \neq 0$)	f) $f: x \mapsto \frac{1}{x+1}$; $x_0 = 2$ ($x_0 = a$, $a \neq -1$)
g) $f: x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$; $x_0 = 2$ ($x_0 = a$, $a > 0$)	h) $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$; $x_0 = 1$ ($x_0 = a$, $a > -1$)
- 9) Ermittle die Ableitung der Funktion f mit Hilfe des Differenzenquotienten.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$	b) $f(x) = \frac{1}{1+3x}$	c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$	d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3x}}$	g) $f(x) = x\sqrt{x}$	h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

10) Untersuche, ob die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist. Zeichne ein Schaubild.

a) $f(x) = |x|$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = [x]$; $x_0 = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{für } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-3}{x+1} & \text{für } x \neq -1 \\ -5 & \text{für } x = -1 \end{cases}$; $x_0 = -1$

11) Wie muß $t \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist?

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x^2+t & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} t \sin x & \text{für } x \leq \frac{\pi}{6} \\ t+x & \text{für } x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = \begin{cases} t-x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1} & \text{für } x < -1 \\ t \cdot \frac{x^2-2}{x+2} & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$; $x_0 = -1$

12) Entwerf ein Schaubild der Funktion f . Ist f an der Stelle x_0 stetig (differenzierbar)?

a) $f(x) = x + |x|$; $x_0 = 0$

b) $f(x) = |x-1|$; $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 0$

d) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $x_0 = 0$

e) $f(x) = 2^{|x|}$; $x_0 = 0$

f) $f(x) = |\lg x|$; $x_0 = 1$

g) $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{für } x \leq 3 \\ 6x-18 & \text{für } x > 3 \end{cases}$; $x_0 = 3$

13) Für welche x -Werte ist die Funktion f monoton zunehmend (abnehmend)?

a) $f(x) = 4x + x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 4x$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

e) $f(x) = x + \cos x$

f) $f(x) = x - 2 \sin x$

g) $f(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - x$

h) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}x$

i) $f(x) = \frac{1}{x} - x + \sin x$

Übungsaufgaben M 1 Lösungen

1) a) 2 b) $2a+h$ c) $3a^2+3ah+h^2$ d) $6a+3h$ e) $-\frac{1}{a(a+h)}$ f) $8a+4h+4$

g) $-\frac{2a+h}{a^2(a+h)^2}$ h) $\frac{2}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

2) a) 2 b) $2a$ c) $3a^2$ d) $6a$ e) $-\frac{1}{a^2}$ f) $8a+4$ g) $-\frac{2}{a^3}$ h) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

3) a) 1 b) 0 c) -0,25 d) 0,25

4) a) $y'=2x$ b) $y'=6x^2$ c) $y'=-\frac{2}{(x-2)^2}$ d) $y'=\frac{2}{x^2}$ e) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ f) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

5) a) $x=0$ b) $x=0$ c) $x \in \mathbb{Z}$ d) $x=0, x=2$ e) $x=0, x=6$ f) $x=3, x=-4$

6) a) $4x-y-4=0$ b) $2y+1=0$ c) $14x-y+16=0$
d) $x-2y-2=0$ e) $3x+2y-7=0$ f) $3x+y-36=0$

7) a) $P(3/-6)$ b) $P_1(1/0), P_2(-\frac{1}{3} / -\frac{4}{27})$ c) $P_1(2/-1), P_2(-2/3)$ d) $P(2/3)$

8) a) $f'(1)=3; f'(-2)=12; f'(a)=3a^2$
b) $f'(0)=0; f'(-1)=-6; f'(a)=-6a^2$
c) $f'(0)=0; f'(-2)=-32; f'(a)=4a^2$
d) $f'(1)=9; f'(-0,5)=0; f'(a)=8a^3+1$

e) $f'(1)=0; f'(a)=1-\frac{1}{a^2} (a \neq 0)$

f) $f'(2)=-\frac{1}{9}; f'(a)=\frac{-1}{(a+1)^2} (a \neq -1)$

g) $f'(2)=4+\frac{\sqrt{2}}{4}; f'(a)=2a+\frac{1}{2\sqrt{a}}$

h) $f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}; f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}; (a \neq -1)$

10) a) stetig (Knick) Fig. 23.5a
b) stetig (am Rand)
c) unstetig (Sprung) Fig. 15.8
d) stetig (Knick) Fig. 24.3d
e) $\ln \frac{\pi}{4}$ nicht definiert. (Fig. 24.3e)

Untersuchung auf Stetigkeit sinnlos,
obwohl der Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ existiert.

f) Nicht stetig (Sprung) (Fig. 24.3f)

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} = 2x-3 & \text{für } x \neq -1 \\ -5 & \text{für } x = -1 \end{cases}$

stetig in $x_0 = -1$ (Fig. 24.3g)

12)

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$; stetig, nicht diff. in 0 (Knick) (Fig. 24.14a)

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \geq 1 \\ 1-x & \text{für } x < 1 \end{cases}$; stetig, nicht diff. in 1 (Knick)

c) $f(x) = \sqrt{x}$ stetig, nicht diff. in 0 (Tangente ist die y-Achse).

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$; stetig, nicht diff. in 0 (Spitze) (Fig. 24.14d)

e) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{für } x \geq 0 \\ 2^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$; stetig, nicht diff. in 0 (Knick) (Fig. 24.14e)

f) $f(x) = \begin{cases} \lg x & \text{für } x \geq 1 \\ -\lg x = \lg \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}$; stetig, nicht diff. (Knick) (Fig. 24.14f).

g) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0; \text{ nicht stetig, nicht diff. in 0 (Fig. 24.14g)} \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} g(x) = x^2 - 9, & x \leq 3 \\ h(x) = 6x - 18, & x > 3 \end{cases}$; f in $x_0 = 3$ stetig und differenzierbar;
stetig, weil $g(3) = h(3) = 0$; differenzierbar, weil $g'(3) = h'(3) = 6$; somit ist
 $f'(3) = 6$ (Fig. 24.14h)

9) Bei Bruchtermen muß durch Erweitern der Differenzenquotient zunächst mit einem Bruchstrich dargestellt werden. Treten Wurzeln im Zähler auf, dann ist der Zähler (durch Erweitern mit der 3. binomischen Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) rational zu machen, so daß der Faktor gekürzt werden kann.

a) $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ b) $f'(x) = \frac{-3}{(1+3x)^2}$ c) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

d) $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ e) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+3x)^3}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1+3x)\sqrt{1+3x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x^3}; f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$

h) $m_s = \frac{\frac{\sqrt{x+h}}{1+x+h} - \frac{\sqrt{x}}{1+x}}{h} = \frac{(1+x)\sqrt{x+h} - (1+x+h)\sqrt{x}}{h \cdot (1+x+h)(1+x)}$

Erweitern mit $(1+x)\sqrt{x+h} + (1+x+h)\sqrt{x}$ führt auf

$$m_s = \frac{(1+x)^2(x+h) - (1+x+h)^2 \cdot x}{h(1+x+h)(1+x)[(1+x)\sqrt{x+h} + (1+x+h)\sqrt{x}]}$$

Für den Zähler Z erhält man

$$Z = x + 2x^2 + x^3 + h + 2hx + hx^2 - x - x^3 - h^2x - 2hx - 2hx^2$$

$$Z = h - hx^2 - h^2x = h(1 - x^2 - hx) \text{ Kürzen von } m_s \text{ durch } h \text{ gibt}$$

$$m_s = \frac{1 - x^2 - hx}{(1+x+h)(1+x)[(1+x)\sqrt{x+h} + (1+x+h)\sqrt{x}]}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ gibt } f'(x) = \frac{1 - x^2}{2(1+x)^2(1+x)\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2(1+x)^2 \cdot \sqrt{x}}; x > 0$$

11) a) $t = 1$

b) $t \cdot \sin \frac{\pi}{6} = t + \frac{\pi}{6}$ äqu $t \cdot \frac{1}{2} = t + \frac{\pi}{6}$ äqu $t = -\frac{\pi}{3}$

c) $t = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{für } x < -1 \\ 3 \cdot \frac{x^2-2}{x+2} & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$; in $x_0 = -1$ stetig für $t = 3$

13) a) Streng monoton zunehmend für $x > -2$; abnehmend für $x < -2$.

b) $f'(x) = x^2 - 9$; $f'(x) > 0$ für $|x| > 3$; $f'(x) < 0$ für $x \in]-3; 3[$.

c) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4$; $f'(x) > 0$ für $x < 2$; $f'(x) < 0$ für $x > 2$.

d) $f'(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$; $f'(x) > 0$ für $x > 1$ oder $x < 0$; $f'(x) < 0$ für $0 < x < 1$.

e) $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$; für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.

f) $f'(x) = 1 - 2 \cos x$; da f' die Periode 2π hat, genügt die Untersuchung in $[0; 2\pi]$:

$$f'(x) > 0, \text{ d.h. } \cos x < \frac{1}{2} \text{ für } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

$$f'(x) < 0, \text{ d.h. } \cos x > \frac{1}{2} \text{ für } 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ oder } \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi.$$

g) $f'(x) = -\sin(\pi x) - 1 \leq 0$; f für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton abnehmend.

h) $f'(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}$; $f'(x) > 0$ in den Intervallen $\left] k\pi + \frac{\pi}{12}; k\pi + \frac{5\pi}{12} \right[$ für $k \in \mathbb{Z}$;

$$k = 0: \left] \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right[; k = 1: \left] \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12} \right[; k = -1: \left] -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12} \right[;$$

$$\text{in den übrigen Intervallen ist } f'(x) < 0: \left] k\pi - \frac{7\pi}{12}; k\pi + \frac{\pi}{12} \right[.$$

i) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \cos x < 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

f streng monoton abnehmend für $x \in \mathbb{R}^-$ und für $x \in \mathbb{R}^+$, also nur innerhalb der Intervalle mit $x < 0$ bzw. $x > 0$.

Es gilt nämlich z.B. $f(1) = \sin 1 > \sin(-1) = -\sin(1) = f(-1)$.

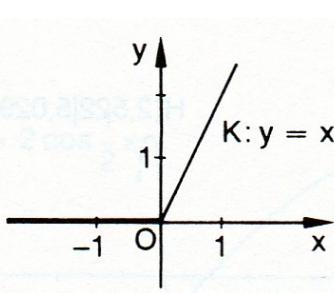


Fig. 24.14 a

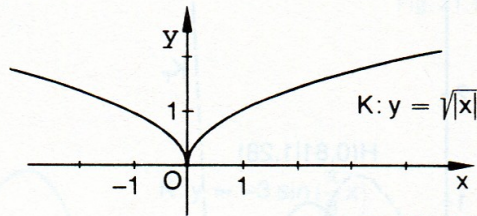


Fig. 24.14 d

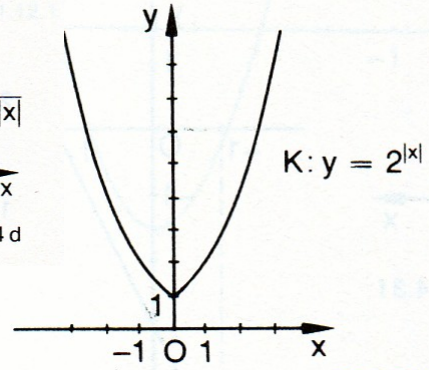


Fig. 24.14 e

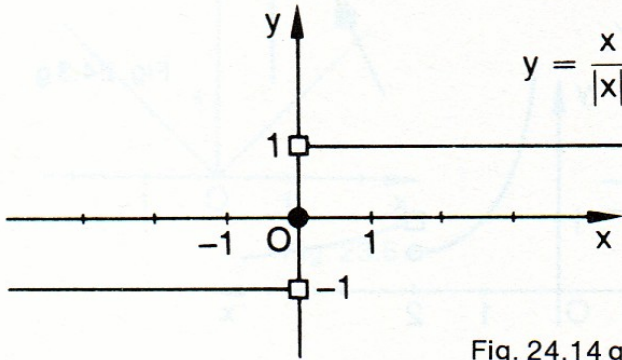


Fig. 24.14 g

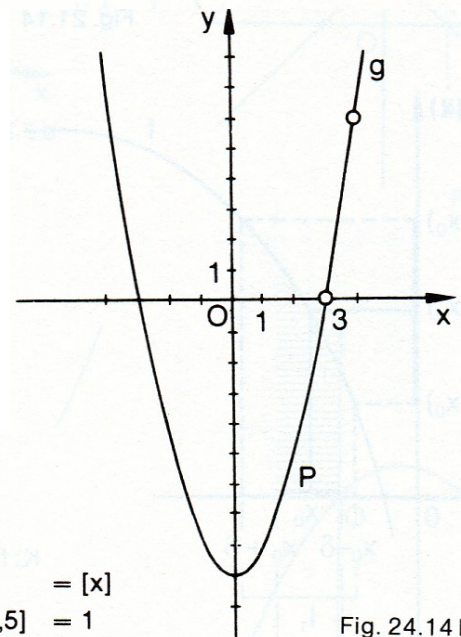


Fig. 24.14 h

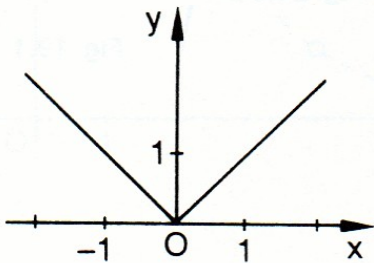


Fig. 23.5 a

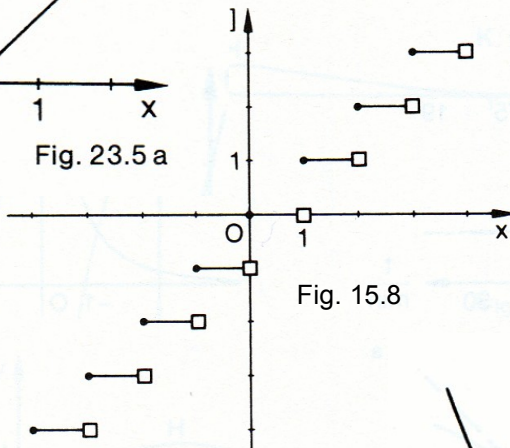


Fig. 15.8

K: $y = [x]$
 $[1,5] = 1$
 $[1] = 1$
 $[-1,5] = -2$
 $[-3] = -3.$

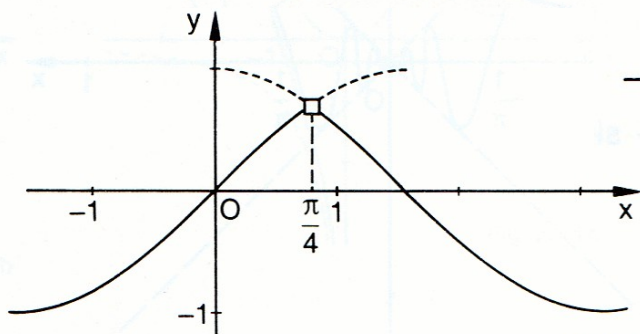


Fig. 24.3 e

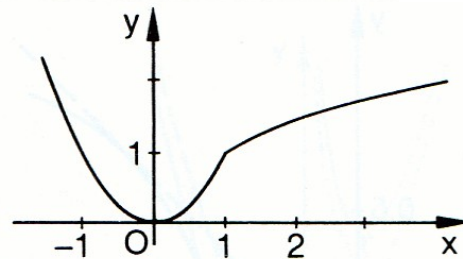


Fig. 24.3 d

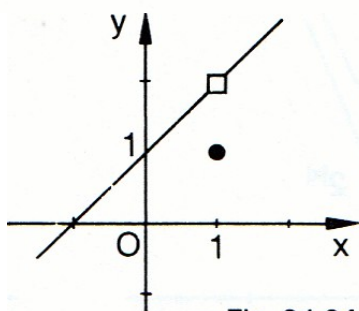


Fig. 24.3 f

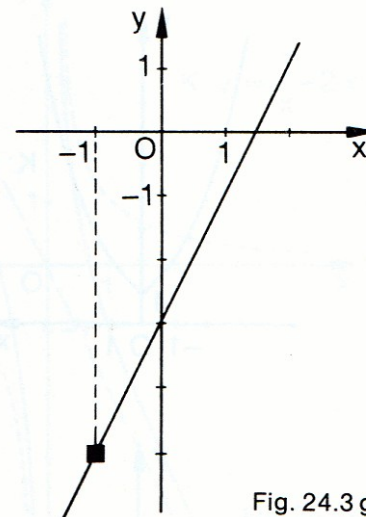


Fig. 24.3 g