4.3.2 Ableitungsregeln

Der Differentialquotient [s. 431] zur Definition der Ableitung beinhaltet eine Grenzwertbildung (Limes), welche meist dadurch ausgeführt wird, dass man den Quotienten algebraisch so umformt, dass der Grenzwert leicht zu erkennen ist. Alles in allem aber je nach Funktion eine mehr oder weniger aufwändige Angelegenheit.

Damit man nun nicht *jede einzelne* Funktion, die einem über den Weg laufen könnte (z.B. in einer Prüfungsaufgabe) auf diese Weise ableiten muss, werden in diesem Abschnitt einige sogenannte „Ableitungsregeln" bewiesen. Diese besagen, wie die Ableitung einer Funktion, welche aus anderen Funktionen *zusammengesetzt* ist, lautet, wenn man die Ableitungen dieser anderen Funktionen kennt. Dabei bedeutet „zusammengesetzt", dass es z.B. die Summe oder das Produkt zweier Funktionen ist, oder dass es sich um eine Hintereinanderausführung zweier Funktionen handelt („eine Funktion ist in die andere Funktion eingesetzt"), und ähnliche Kombinationen.

Mit diesen Regeln lassen sich bereits eine grosse Klasse von Funktionen (insbesondere natürlich alle, die an einer Prüfung verlangt werden können) in einfachere Funktionen zerlegen. Von diesen sozusagen „elementaren" Funktionen benötigt man dann doch noch die Ableitung, aber es handelt sich um eine kleine Liste, deren Differentialquotienten man nur einmal bilden muss, und sich das Resultat einfach merkt (sie stehen alle auch in der Formelsammlung). Dies wird dann in [433] geschehen.

Die Regeln dieses Abschnitts und die Ableitungen der elementaren Funktionen des nächsten Abschnitts sind **sehr wichtig**. Man muss die Letztgenannten gut auswendig kennen und die Erstgenannten oft *anzuwenden geübt haben*. Wenn man an der Prüfung erst die passende Regel finden und dann die einzelnen Ableitungen nachschlagen muss, verliert man viel zu viel Zeit! Und mindestens eine Aufgabe, in der eine Ableitung bestimmt werden muss, ist ganz sicher in der Prüfung dabei (denn: wie gesagt: wichtig!).

Jedoch kann ganz klar unterschieden werden: An einer *schriftlichen Prüfung* müssen die Regeln nur *angewendet* werden, nie bewiesen oder hergeleitet (mit dem Differentialquotienten). An einer *mündlichen* Prüfung wird hingegen sehr oft nach der Definition der Ableitung gefragt, also nach dem Differentialquotienten (ohne dass dieses Wort fallen muss, schliesslich gehört es dazu, die Definition der Ableitung zu kennen.) Dann kann durchaus eine (einfache) Funktion von Hand über den Grenzwert abzuleiten verlangt sein, oder eine Ableitungsregel soll dadurch begründet werden. Hier genügt es, sich für jede der folgenden Regeln *den entscheidenden Schritt* im Beweis zu merken. Wenn man nicht den ganzen Beweis lückenlos hinbekommt, macht das nichts!

Zu versuchen, sich den entscheidenden Schritt jedes der folgenden Beweise zu merken, bedeutet auch, ein besseres *Verständnis* dafür zu haben, warum die Regeln eigentlich so lauten, wie sie lauten. Und das wiederum hilft für das Verständnis ganz vieler Dinge aus der Differential- und Integralrechnung!

4.3.2.1 Einfache Formulierungen der Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt werden alle benötigten Ableitungsregeln formuliert und bewiesen. Zu jeder Aussage (Regel) gehört *eigentlich* eine Aufzählung der *Voraussetzungen*, die erfüllt sein müssen. So müssen natürlich die verknüpften Funktionen an den jeweiligen Stellen definiert, stetig, sogar differenzierbar sein.

Diese Voraussetzungen werden hier zunächst weggelassen, damit der Blick auf die eigentlichen Regeln frei bleibt. Im nächsten Abschnitt werden die nötigen technischen Details nachgereicht. In den Beweisen wird natürlich an einigen Stellen dennoch auf die Voraussetzungen Bezug §genommen (sonst wären es ja keine *Voraus*setzungen!).

Die Ableitung der konstanten Funktion ist Null

$$\left(c \right)' = 0$$

Bemerkung:

- Vorsicht, es ist gefährlich sich die Regel zu merken als „eine Konstante gibt abgeleitet Null“. Gemeint ist nämlich die *konstante Funktion* $f(x) = c$, welche überall den gleichen Wert c annimmt. Der Graph ist eine *waagrechte Gerade*, welche die y – Achse bei $y = c$ schneidet (der Wert an der Stelle 0). Da die Gerade *waagrecht* ist, also überall die Steigung 0 hat, erstaunt das Resultat nicht.
  Dennoch wird der Beweis mithilfe der Definition der Ableitung, also dem Differentialquotienten, geführt:

Beweis: $\left(c \right)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$ ■

Ein konstanter Summand verschwindet beim Ableiten

$$\left(f(x) + c \right)' = f'(x)$$

Bemerkung:

- Der konstante Summand bewirkt, da er an *jeder Stelle* den gleichen Wert hat (eben konstant ist), eine *Parallelverschiebung* des Graphen von $f(x)$ in Richtung der y – Achse um c Einheiten (je nach Vorzeichen von c nach oben oder unten).
  Jedenfalls ändert sich dadurch die *Steigung* des Graphen *nirgends*. Also ist auch dieses Resultat graphisch anschaulich. Der formale Beweis folgt natürlich auch:

Beweis: $\left(f(x) + c \right)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + c - \left(f(x) + c \right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

(Merke: Der konstante Summand hebt sich im Differentialquotienten weg.) ■

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten („Faktorregel“)

$$\left(c \cdot f(x) \right)' = c \cdot f'(x)$$

Bemerkung:

- Der konstante Faktor bewirkt eine *Streckung* des Graphen in die *y* – Richtung. Dadurch erhöht sich auch die *Steigung* um den entsprechenden Faktor.

Beweis:

$$\big(c \cdot f(x) \big)' = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot \big(f(x+h) - f(x) \big)}{h}$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x) \,.$$

Der nötige Umformungsschritt war also ein simples *Ausklammern*. Dass man den konstanten Faktor ausklammern kann, liegt ja gerade daran, dass er konstant ist, also an der Stelle x und $x + h$ denselben Wert hat! (Weiter wurde eine Regel über das Rechnen mit Grenzwerten verwendet: die Reihenfolge von Produkt und Grenzwertbildung darf vertauscht werden.) ■

Man sieht: Die Ableitungsregeln, wenn eine Funktion einen *konstanten Summanden* enthält, einen *konstanten Faktor* enthält oder sogar selbst *überall konstant ist*, müssen unterschieden werden! Mit Hilfe der folgenden Additions- und Produktregel lassen sich die Regeln für konstanten Summanden und konstanten Faktor auf die Regel über die Ableitung der konstanten Funktion zurückführen, aber es ist leichter, diese Regeln (welche somit Spezialfälle der erwähnten Regeln darstellen) direkt anzuwenden. Es ist natürlich beruhigend, dass sich die Regeln nicht widersprechen!

Summen und Differenzen können einzeln abgeleitet werden

$$\big(f(x) \pm g(x) \big)' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bemerkungen:

- Das heisst in Worten: Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist die Summe (Differenz) der Ableitungen dieser Funktionen. Eine Summe *beliebig vieler* Summanden (dürfen auch negativ sein) darf also *gliedweise* abgeleitet werden.
- Im folgenden Beweis sind die beiden Aussagen für Summe und Differenz gleichzeitig notiert (es steht jeweils ein „ $\pm$ “). Man kann den Beweis auch für Summe und Differenz einzeln lesen und jeweils überall nur „ + “ bzw. „ “ einsetzen. Aus dem Beweis der Summenregel könnte man übrigens mit dem konstanten Faktor „ -1 “ ebensogut die Differenzregel herleiten.
- Und wie oben schon erwähnt: Setzt man für $g(x)$ die konstante Funktion c ein, so ergibt sich aus dieser Regel zusammen mit der Regel, dass die Ableitung der konstanten Funktion Null ist, wieder die Regel über den konstanten Summanden.

Beweis:

$$\big(f(x) \pm g(x) \big)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - \big(f(x) \pm g(x) \big)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) \pm \big(g(x+h) - g(x) \big)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

Es fällt auf, wie gut sich die Addition (und Subtraktion) mit dem Differentialquotienten vertragen. Alles lässt sich hübsch aufteilen. Wieder wurde die Vertauschbarkeit von Limesbildung mit „Plus“ bzw. „Minus“ benötigt (wie oben für „Mal“.) ■

Die Produktregel

$$\big(f(x) \cdot g(x) \big)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

Bemerkungen:

- In Worten: Die Ableitung eines Produkts von zwei Funktionen ist die Summe der beiden möglichen Produkte dieser beiden Funktionen, wenn jeweils die eine Funktion abgeleitet ist, die andere aber nicht.
- Wie unterscheidet sich die Produktregel von der Regel des konstanten Faktors oben? Hier handelt es sich um ein Produkt, welches in *beiden Faktoren* die Variable x enthält. Ein Faktor, der *unabhängig* von x ist, wäre hingegen *konstant*.
- Auch die Ableitung eines *konstanten Faktors* ist ein Spezialfall dieser Regel, denn der Summand, der die Ableitung der Konstanten (also Null) enthält, verschwindet: $\big(c \cdot f(x) \big)' = c'\, f(x) + c\, f'(x) = 0 \cdot f(x) + c\, f'(x) = c\, f'(x)$.

Beweis:

$$\big(f(x) \cdot g(x) \big)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Es wird also „Null addiert“, damit man (verschieden!) ausklammern kann:

$$\begin{aligned} \big(f(x) \cdot g(x) \big)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x) \big) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \big(g(x+h) - g(x) \big)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \end{aligned}$$

(Hätte man bei der „Addition von Null“ die Klammern umgekehrt gewählt, also $\pm f(x+h) \cdot g(x)$, so hätte das Ergebnis $f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$ gelautet, nach dem Kommutativgesetz ist das aber dasselbe.) ■

Im Gegensatz zur Summe ist beim Produkt nicht auf den ersten Blick ersichtlich, wie die Ableitung eines Produkts von *mehr als zwei* Faktoren, also z.B. $f(x) g(x) h(x)$ lautet.
Auf den zweiten Blick jedoch schon. Erst überlegen, dann umblättern!
Die Antwort lautet: $(f g h)' = f' g h + f g' h + f g h'$: In jedem der drei Summanden ist jeweils nur *eine* der Funktionen abgeleitet (das gilt entsprechend auch für mehr als drei): $(f g h)' = ((f g) h)' = (f g)' h + (f g) h' = (f' g + f g') h + f g h' = f' g h + f g' h + f g h'$.

Die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Bemerkungen:

- In Worten: Die Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen (Zähler- und Nennerfunktion) ist die Differenz der Produkte der Ableitung der Zähler- und der nicht abgeleiteten Nennerfunktion bzw. umgekehrt, geteilt durch das Quadrat der Nennerfunktion. (**Wichtig:** Beginne *immer* mit der Ableitung des *Zählers*!)
- Die Struktur entspricht stark der Produktregel, nur steht anstelle des „Plus“ ein „Minus“ (wie ja auch statt des „Mals“ des Produkts hier ein „Durch“ des Quotienten steht.) Bei der Differenz kommt es jedoch im Gegensatz zur Summe auf die *Reihenfolge* an, es lohnt sich daher, auch bei der Produktregel stets die gleiche Reihenfolge zu verwenden („ $f'\,g + f\,g'$ “).

Beweis: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)\,h}$$

(Null addieren:) $$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)\,h}$$

(ausklammern:) $$= \lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right)\cdot\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\left(\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}\cdot g(x) - f(x)\cdot\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}\right)\cdot\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\right)$$

Es wird also wie bei der Produktregel „Null addiert“, aber dann muss noch zusätzlich ein „Minus ausgeklammert“ werden, damit genau ein Differentialquotient dasteht. Als Nebeneffekt des Gleichnamigmachens steht noch ein g^2 im Nenner.

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)} \quad .$$

Alternativer Beweis: Erst die Ableitung der reziproken Funktion beweisen (siehe unten, geht etwas einfacher), und dann die Produktregel benutzen. ∎

Die Ableitung der reziproken Funktion

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Bemerkungen:

- *Vorsicht:* Nicht verwechseln mit der Ableitung der *Umkehrfunktion* (siehe unten).
- Diese Regel braucht *nicht unbedingt* auswendig gelernt zu werden! Sie folgt direkt aus der Quotientenregel (siehe auch der folgende Beweis) und ist bei Bedarf beinahe so schnell angewendet wie diese.

Beweis: *1. Methode:* Falls (wie oben) die Quotientenregel bereits bewiesen wurde, ist es ein einfacher Spezialfall dieser Regel. Man setze für $f(x) = 1$ und für $g(x) = f(x)$ in die Quotientenregel ein:

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \;.$$

2. Methode: Man bildet ganz normal den Differentialquotienten:

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)\, f(x)\, h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x+h)\, f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \;.$$

(In diesem Fall könnte man wie oben erwähnt nun umgekehrt die Quotientenregel aus dieser Regel und der Produktregel gewinnen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)' \underset{\textit{Produktregel}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)'$$

$$\underset{\textit{Reziproke}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$) ■

Die Ableitung einer verschachtelten Funktion (Kettenregel)

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Bemerkungen:

- Die „Verschachtelung“ der Funktionen bedeutet, dass eine Funktion (hier $g(x)$, genannt *innere Funktion*) in die andere Funktion (hier $f(z)$ mit $z = g(x)$, genannt *äussere Funktion*) *eingesetzt* wurde. Man kann sich vorstellen, eine Funktion wird nicht auf die Variable x, sondern auf eine bereits „verarbeitete“ Variable $g(x)$ angewendet.
- In der Leibnizschen Schreibweise ist dies sehr eingängig: mit $y = f(g(x)) = f(z)$:
  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
- Die Regel besagt also in Worten: Sind zwei Funktionen verschachtelt, so ist die Ableitung dieser verschachtelten Funktion *gleich der Ableitung der äusseren Funktion* (wobei sich an der inneren Funktion *nichts ändert*) *mal die Ableitung der inneren Funktion*.

Beweis:

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$

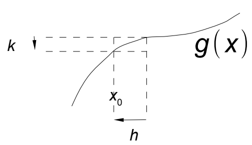
(Es wurde also „mit Eins multipliziert“ bzw. *erweitert*. Nenner vertauschen:)

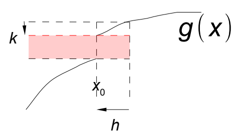
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x)+g(x+h)-g(x)\right)-f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \quad \text{(Null addiert!)}$$

Substituiere im *linken Faktor:* $z = g(x)$ sowie $k = g(x+h)-g(x)$:

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+k)-f(z)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Nun geht mit h gegen Null auch $g(x+h)$ gegen $g(x)$, also auch $k = g(x+h)-g(x)$ gegen Null.

An dieser Stelle wird die Voraussetzung benutzt, dass $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig sein muss. Denn sonst könnte es sein, dass h zwar gegen Null geht, aber k *nicht!*
Vergleiche die beiden folgenden Bilder mit stetigem $g(x)$ links und unstetigem $g(x)$ rechts:





($g(x)$ hat an der Stelle x_0 eine Unstetigkeit, z.B. einen Sprung. $g(x_0)$ sei *unten*.)

h ist die *Breite* des *senkrechten* gestrichelten Streifens, k ist die *Höhe* des *waagrechten* gestrichelten Streifens. Links geht mit h auch k gegen Null, während rechts der rot markierte Streifen mit einer Höhe ungleich Null für k übrig bleibt, auch wenn h schon Null ist!

Also ist der linke Faktor *gleich dem Differentialquotienten der Funktion $f(z)$:*

$$= f'(z)\cdot g'(x) = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) \quad \textit{(z rücksubstituiert.)}$$

Es wurde wieder der Grenzwertsatz für Produkte verwendet
(Limes und Mal vertauscht). ■

Die Kettenregel ist ein *mächtiges Werkzeug*, denn durch Verschachteln von Funktionen lassen sich sehr komplizierte Vorgänge beschreiben. Wenn eine Funktion *mehrfach verschachtelt* ist, wird einfach von *aussen nach innen* abgeleitet, wobei immer mit der Ableitung der nächstinneren Funktion multipliziert wird, falls diese selber verschachtelt war, noch mit der Ableitung deren innerer Funktion etc., bis man bei einer nicht mehr verschachtelten Funktion ankommt. (So eine Funktion hat als „innere Funktion" nur noch die Variable x . Sollte man die als die einfache Funktion $y = x$ auffassen und (unnötigerweise) noch mit deren Ableitung, also 1, multiplizieren, so macht das zum Glück nichts. Oder anders gesagt: Man kann auch eine „gar nicht verschachtelte" Funktion nach der Kettenregel ableiten, es kommt nichts Falsches heraus!)

Die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\left(f^{-1}(x) \right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x) \right)}$$

Bemerkungen:

- Die Regel besagt, dass man für jede Funktion, deren Ableitung man kennt, auch die Ableitung ihrer Umkehrfunktion angeben kann. Es genügt, die Umkehrfunktion in das Reziproke der abgeleiteten Funktion einzusetzen. Die Regel lautet also in Worten: „Die Ableitung der Umkehrfunktion einer Funktion ist das Reziproke der Ableitung dieser Funktion, angewendet auf die Umkehrfunktion."

Beweis: Die Regel lässt sich mit Hilfe der *Kettenregel* beweisen.
Zunächst ist nach Definition der Umkehrfunktion: $f\left(f^{-1}(x) \right) = x$.
Beide Seiten ableiten (die linke Seite gemäss der Kettenregel):
$f'\left(f^{-1}(x) \right) \cdot \left(f^{-1}(x) \right)' = 1$. Nun nach der gesuchten Ableitung der Umkehrfunktion auflösen: $\left(f^{-1}(x) \right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x) \right)}$. ■

4.3.2.2 Genauere Formulierung der Ableitungsregeln

Nun werden, wie erwähnt, einige technische Details nachgetragen
(und zwar kleingedruckt: Wer will, kann diesen Abschnitt auch überspringen).

Als erstes: Was ist eigentlich gemeint mit einem Ausdruck wie $\left(f(x)+g(x)\right)'$?

Der „Ableitungsstrich“ nach der Klammer bedeutet, dass man die Ableitungsfunktion der Funktion, die in der Klammer steht, sucht. Der Ausdruck in der Klammer ist jedoch eine Summe von Funktionen. Gemeint ist, dass für eine beliebige Stelle x der Funktionswert der Funktion $f(x)$ und der Funktionswert der Funktion $g(x)$ gebildet wird, und diese beiden Zahlen addiert werden. Es ergibt sich dann der Funktionswert der Funktion $h(x)=f(x)+g(x)$ an der Stelle x. Der Ausdruck $f(x)+g(x)$ ist also eine *Kurzschreibweise* für die Funktion $h(x)$, welche auf die beschriebene Weise definiert ist.

Dies gilt entsprechend für alle in obigen Regeln vorkommenden Verknüpfungen von Funktionen.

Daraus ergeben sich jedoch einige wichtige Einschränkungen:

- Die Ableitungsfunktion ist *nur für diese Werte* x definiert, für welche *sowohl* $f(x)$ *als auch* $g(x)$ definiert sind (sofern beide Funktionen vorkommen).
- Weiter müssen, falls in der Ableitungsregel auf der rechten Seite die entsprechenden Ableitungen $f'(x)$ oder $g'(x)$ vorkommen, beide an dieser Stelle *existieren* (und dürfen, falls sie in einem Nenner stehen, nicht zu einer Division durch Null führen.)
- Andererseits existieren Ableitungen nur für solche Stellen, für welche die Funktion definiert ist (sie muss sogar auf einer ganzen *Umgebung* dieser Stelle definiert sein). Insofern genügt die zweite Bedingung. Meist sagt man daher nur: „Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an einer Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch ihre Summe / Differenz / Produkt / ... differenzierbar und es gilt ...“

Am Beispiel der *Quotientenregel* soll illustriert werden, wie die Aussagen jeweils eigentlich korrekt formuliert werden müssten:

Die Quotientenregel (Beispiel einer ausführlichen Formulierung)

Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen mit Definitionsbereich D_f bzw. D_g, so versteht man unter dem *Quotient* der beiden Funktionen, $\frac{f(x)}{g(x)}$, diejenige Funktion, welche an jeder Stelle x aus dem Definitionsbereich $D_f \cap D_g$ den Wert $\frac{f(x)}{g(x)}$ annimmt, wobei hier natürlich zusätzlich $g(x)\neq 0$ gelten muss.

Falls an einer Stelle x die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert sind, $g(x)\neq 0$ ist und die beiden Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ existieren, **so** existiert dort auch die Ableitung des Quotienten der beiden Funktionen, und für ihren Wert **gilt**: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

Zweitens: Wo wird *Stetigkeit* der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ vorausgesetzt?

Zum Beispiel im Beweis der *Produktregel*: Es wird der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ gebildet.

Dies gilt natürlich nur, wenn die Funktion $g(x)$ an der Stelle x *stetig* ist! Siehe auch das Bild im Kleingedruckten im Beweis der Kettenregel.

Da Stetigkeit einer Funktion an einer gegebenen Stelle *immer* eine *notwendige Bedingung* für die Differenzierbarkeit einer Funktion an dieser Stelle ist (jedoch keine *hinreichende!*), genügt es also auch hierfür, die *Differenzierbarkeit* der einzelnen Funktionen vorauszusetzen.

Und Drittens: Bei *allen* Ableitungsregeln wird zum Beweis die Gültigkeit der *Grenzwertregeln* vorausgesetzt, also dass der Grenzwert einer Summe, eines Produktes etc. gleich der Summe, dem Produkt etc. der einzelnen Grenzwerte ist. Dies gilt z.B. nicht, wenn einer der Faktoren einen uneigentlichen Grenzwert hätte. Deshalb muss es im obigen Beispiel auch heissen, dass die Ableitungen der *einzelnen Funktionen* alleine schon *existieren* müssen.

Die Ableitungsregeln sind so gesehen eigentlich direkte Konsequenzen der Grenzwertregeln, denn jede Ableitung *ist* ja ein Grenzwert, nämlich *ein Differentialquotient*.

Ableitungsregeln in Kurzform

Es bezeichnen in allen Regeln f und g Funktionen, die *abhängig* von der Stelle x sind, jedoch c eine konstante Zahl, die *unabhängig* von der Stelle x immer denselben Wert c besitzt.

$(c)' = 0$	**Konstante (allein) gibt abgeleitet Null**
$(f + c)' = f'$	**Konstanter Summand verschwindet beim Ableiten**
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	**Konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten (Faktorregel)**
$(f + g)' = f' + g'$	**Summen und Differenzen dürfen einzeln abgeleitet werden (Summenregel)**
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	**Produktregel**
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	**Quotientenregel**
$[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$	**Kettenregel („Äussere mal Innere“, „... mal die innere Ableitung“)**
$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$	**Ableitung der Umkehrfunktion**