Übungsaufgaben M 12

1) $a_n = 6n+1,\ \ b_n = 6n+5$
Warum gehören alle Primzahlen, die grösser als 5 sind, entweder zur Folge (a_n) oder zur Folge (b_n)?

2) Beweise, dass der Achterrest aller ungeraden Quadratzahlen gleich 1 ist.

3) $a_n = (n-1)n(n+1)(n+2)+1$
Beweise, dass alle Glieder der Folge (a_n) Quadratzahlen sind.

4) Berechne $20+27+34+41+\cdots+1490$.

5) Wie viele Glieder der AF $1,2,\ldots$ muss man, bei a_1 beginnend, mindestens addieren, wenn man mehr als
a) 10 000 b) 1 000 000
erhalten will?

6) Eine AF beginnt mit 3, endet mit 37 und hat die Summe 400. Wie viele Glieder hat die Folge?

7) Zwölf Zahlen bilden eine AF. Die Summe der beiden Mittelglieder ist 37, das Produkt von Anfangs- und Schlussglied ist 70. Gesucht sind die ersten drei Glieder.

8) Welche Zahl der Folge der natürlichen Zahlen ist gleich dem zehnten Teil der Summe aller vorausgehenden Zahlen?

9) Wie viele Glieder der GF $15,16,\ldots$ muss man mindestens addieren, wenn ihre Summe grösser als eine Milliarde werden soll?

10) a,b,c,d bilden eine wachsende Folge; a,b,c eine GF und b,c,d eine AF. Die Summe des ersten und des letzten Gliedes beträgt 8, die Summe aller vier Glieder 14. Berechne die vier Glieder.

11) Von einer GF kennt man $s_1 = 10$ und $s_2 = 19$. Für welche n gilt
a) $s_n < 99$? b) $99 < s_n < 99.99$? c) $99.99 < s_n < 100$?

12) Die Summe der ersten vier Glieder einer unendlichen GF ist 175, die Summe aller übrigen Glieder 81. Berechne a_1 und a_5.

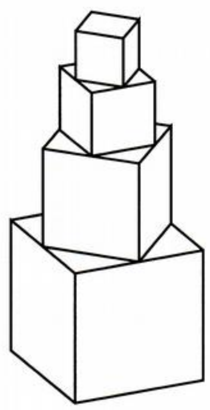
13) Welches ist der grösste Wert, den der Quotient q einer unendlichen GF, die mit $a_1 = 4$ beginnt, annehmen kann, wenn die Summe aller Glieder der Folge 12 nicht übersteigen darf?

14) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die GF?
a) $1,\ \dfrac{x}{x+1},\ \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2,\ldots$ b) $1,\ \dfrac{x^2}{10x-24},\ \left(\dfrac{x^2}{10x-24}\right)^2,\ldots$

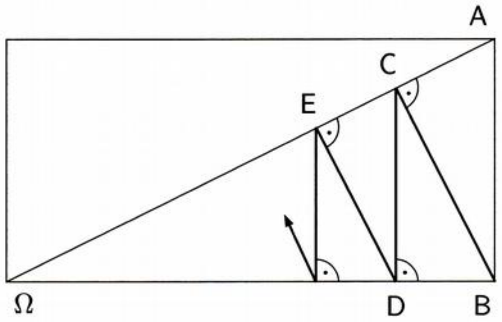
15) In einer unendlichen Folge von Quadraten Q_n, dessen erstes einen Umfang von 4 m hat, kann man das $(n+1)$-te Quadrat so auf das n-te Quadrat legen, dass die Ecken des $(n+1)$-ten Quadrates auf die Seitenmitten des n-ten Quadrates zu liegen kommen.
a) Gesucht ist das kleinste n, für welches der Umfang von Q_n kleiner als 1 mm ist.
b) Gegen welchen Grenzwert strebt die Summe aller Umfänge?

16) Einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckfläche des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw.

a) Wie hoch wird der Würfelturm höchstens?
b) Berechne den Grenzwert des Turmvolumens.

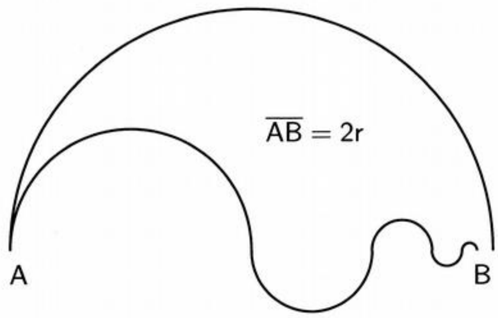


17) Wie lang ist der aus unendlich vielen Strecken zusammengesetzte Weg von A über $B, C, D, \ldots$ bis Ω?
$\overline{AB} = 1$, $\overline{B\Omega} = 2$



18) Der Schlangenweg von A nach B setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammen, deren Radien eine GF mit dem Quotienten 0.5 bilden.

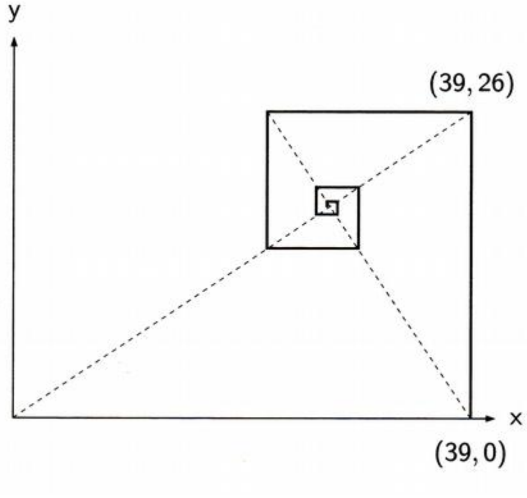
a) Ist der Schlangenweg oder der "Halbkreisweg" von A nach B kürzer?
b) Berechne den Flächeninhalt desjenigen Gebietes, das von sämtlichen Halbkreisen bestimmt wird.



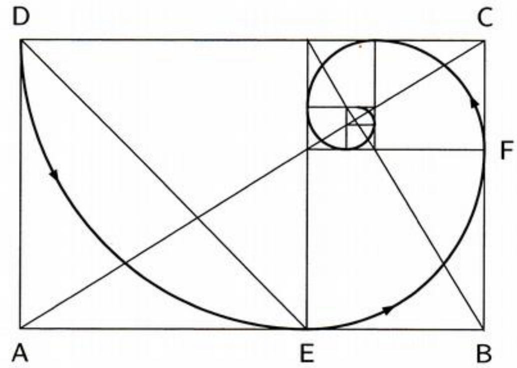
19) Einer Kugel mit Radius r wird ein Würfel eingeschrieben, dem Würfel eine Kugel, der Kugel wieder ein Würfel usw. Berechne die Summe der Oberflächen aller Würfel.

20) Bei einer unendlichen Folge von Kugeln bilden die Längen der Durchmesser eine GF, die mit 20 cm beginnt. Die Summe der Durchmesser aller Kugeln beträgt 1 m. Berechne das Volumen aller Kugeln.

21) Der spiralförmige Weg beginnt im Nullpunkt und besteht aus Strecken, deren Längen eine GF bilden. Wie lang ist der gesamte Weg, und wo ist sein Ziel?



22) Die Seitenlängen des Rechtecks $ABCD$ stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts. Die "goldene Spirale" ist aus lauter Viertelskreisen zusammengesetzt; der grösste dieser Viertelskreise hat den Radius 1.



a) Wie lang ist die aus beliebig vielen Viertelskreisen zusammengesetzte "goldene Spirale", die von D bis zu ihrem "Auge" führt?

b) Zeige, dass der Viertelskreis DE gleich lang ist wie die ganze Spirale von F bis zu ihrem Auge.

c) A sei der Nullpunkt eines Koordinatensystems; die Strecke AB liegt auf der x-Achse, die Strecke AD auf der y-Achse. Berechne die Koordinaten des Auges der Spirale (3 wesentliche Ziffern).

23) Definiere die Folge durch eine Rekursionsformel.

a) 50, 47, 44, 41, ... b) 3, 6, 12, 24, ... c) 2, 3, 5, 8, 12, ...
d) 5, 9, 17, 33, 65, ... e) 1, 4, 10, 19, 31, ... f) 4, 10, 22, 46, 94,...

24) Untersuche die Folge $n \to a_n$ auf Monotonie und Grenzen.

a) $a_n = 5n - 1$ b) $a_n = \frac{n}{3}$ c) $a_n = \frac{3}{n}$

d) $a_n = (-2)^n$ e) $a_n = \frac{n^2}{1-2n}$ f) $a_n = 4 + (-1)^n$

25) Ebenso:

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ b) $a_n = \frac{n-1}{n}$ c) $a_n = 2^{-n}$

d) $a_n = \frac{n}{n+3}$ e) $a_n = 1 - (-2)^{-n}$ f) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$

26) Berechne das erste Glied der GF.

a) $a_3 = 48, a_5 = 75$ b) $a_2 = 20, a_5 = 10.24$ c) $a_3 = 216, a_8 = 28.\overline{4}$

27) Bei einer AF beträgt die Summe der ersten fünf Glieder 165, die Summe der ersten fünfzehn Glieder 120. Wie heisst das erste Glied ?

28) Schalte zwischen 48 und 243 drei Zahlen so ein, dass
a) eine AF, b) eine GF mit fünf Gliedern entsteht.
Wie heissen die fehlenden Glieder der Folge ?

29) Das 4. und das 14.Glied einer AF haben zusammen den Wert 22; das 9.Glied ist um 4 grösser als das 4.Glied. Berechne das 1.Glied der Folge.

30) Eine AF ist durch $a_1 = 20$ und $d = 4$ gegeben. Für welches n gilt: die Summe der ersten n Glieder ist halb so gross wie die Summe der folgenden n Glieder ?

31) Die Zahl 111 ist in drei Summanden zu zerlegen, die eine GF bilden. Der mittlere Summand ist 36. Wie heissen die anderen ?

32) Die Summe einer viergliedrigen AF beträgt 130. Lässt man das 3.Glied weg, so entsteht eine GF. Wie heissen die vier Glieder der AF ?

33) Die drei Zahlen a, b, c mit dem Summenwert 3 bilden in dieser Reihenfolge eine AF, in der Reihenfolge b, a, c eine GF. Wie heissen die Zahlen ?

34) Ein gleichschenkliges Trapez besitzt den Umfang 40 cm. Die Masszahlen der Decklinie a, der Schenkel, der Grundlinie und der Diagonalen bilden in dieser Reihenfolge eine AF.
Bestimme den Flächeninhalt und die Winkel des Trapezes.

35) Die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 bilden in dieser Reihenfolge eine AF.
Die Zahlen z_2, z_3, z_1, z_4+3 bilden in dieser Reihenfolge eine GF.
Bestimme die Zahlen z_1, z_2, z_3 und z_4.

Vollständige Induktion

Beweise mit vollständiger Induktion, dass die folgenden Formeln für alle natürlichen Zahlen n gelten.

36) $s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

37) $s_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

38) $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

39) Stelle eine Formel für p_n auf und beweise sie.

a) $p_n = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot a_n$

b) $p_n = (1 + \frac{4}{1\cdot 5})(1 + \frac{4}{3\cdot 7})(1 + \frac{4}{5\cdot 9}) \cdot \ldots \cdot a_n$

40) Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

a) die Zahl $z_n = 5^n - 1$ ist durch 4 teilbar;

b) die Zahl $z_n = 12^n - 7^n$ ist durch 5 teilbar;

c) die Zahl $z_n = 4^n + 2$ ist durch 6 teilbar.

41) Ist die Folge $n \to a_n$ konvergent oder divergent ? Gib den Grenzwert a bzw. die Art der Divergenz an.

a) $a_n = \frac{2}{n+2}$ b) $a_n = \frac{2n}{n+2}$ c) $a_n = \frac{2^n}{n+2}$

d) $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$ e) $a_n = \frac{2+n\cdot(-1)^n}{n}$ f) $a_n = 3 - n\cdot(-1)^n$

g) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^4$ h) $a_n = (1 - \frac{1}{4})^n$ i) $a_n = 2^{-\frac{1}{n}}$

42) Zeige, dass die Folge jede noch so grosse Schranke k überschreitet, zuerst allgemein, dann für k > 100'000.

a) $a_n = n^2$ b) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ c) $a_n = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$

43) Bestimme den Grenzwert der Folge $n \to a_n$ mithilfe der Grenzwertsätze.

a) $a_n = \frac{4+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}$ b) $a_n = (3+\frac{1}{n})(4-\frac{1}{n})$ c) $a_n = (n-3)^2 \cdot \frac{n}{n^2+1}$

d) $a_n = \frac{(3n-1)^3}{n^3}$ e) $a_n = 3 + 0{,}8^n$ f) $a_n = \frac{(2n-1)(3n+5)}{(n+2)(4n-1)}$

g) $a_n = 7 + \frac{4n+1}{n+3}$ h) $a_n = \frac{\frac{3}{n+1}-\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}}$ i) $a_n = \frac{(n+4)^3 - n^3}{(n+4)^3 + n^3}$

k) $a_n = \frac{3^n+1}{3^{n+1}}$ l) $a_n = \frac{3^n}{3^n \cdot 3^{-n}}$ m) $a_n = \frac{4^{n+1}}{4^n - 4^{n-1}}$

44) Ermittle den Wert der unendlichen GR.

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots$ b) $5+\frac{3}{2}+\frac{9}{20}+\dots$ c) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-+\dots$

d) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-+\dots$ e) $2+\sqrt{2}+1+\dots$ f) $8+4\sqrt{3}+6+\dots$

45) Berechne den fehlenden Wert a_1, q oder s der unendlichen GR.

a) $s = 5, q = \frac{1}{2}$ b) $a_1 = 1, s = 10$ c) $s = 32, q = \frac{5}{8}$ d) $s = 4a_1$

46) Bei einer unendlichen GR mit $q = \frac{1}{6}$ ist die Summe um 2.4 grösser als das erste Glied. Welchen Wert hat dieses ?

47) Verwandle den periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch.

a) $0.\overline{5}$ b) $0.\overline{54}$ c) $0.\overline{543}$ d) $0.1\overline{3}$ e) $0.25\overline{7}$ f) $0.4\overline{81}$

48) Wieviele Glieder der gegebenen GR sind mindestens nötig, damit sich ihre Summe um weniger als 0.001 von der Summe der unendlichen GR unterscheidet ?

a) $a_1 = 6, q = \frac{1}{4}$ b) $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\dots$ c) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-+\dots$

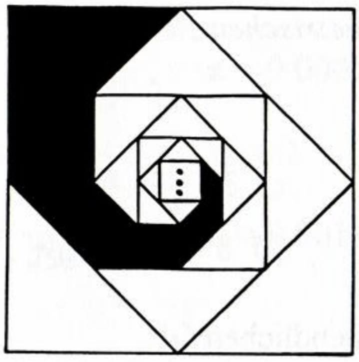
49) . Bei einer mit $\frac{1}{5}$ beginnenden unendlichen GR ist die Summe um $\frac{1}{15}$ kleiner als ihr Quotient q. Wie gross ist dieser ?

50) . Für welche Werte der reellen Zahl x konvergiert die GR ?

a) $1+x+x^2+\dots$ b) $1+x^2+x^4+\dots$ c) $1+(1+x)+(1+x)^2+\dots$

51) . Die Summe einer unendlichen GR beträgt 9, die Summe ihrer ersten zwei Glieder 5. Wie heissen die ersten zwei Glieder ?

52) . Die Summe einer unendlichen GR beträgt 20, die Summe aus den Quadraten der Glieder 100. Berechne das erste Glied der Reihe.

53) 

Dem Startquadrat (Seite 8 cm) wird das Mittenquadrat einbeschrieben, diesem wieder das Mittenquadrat, usw.

a) Welchen Flächeninhalt hat die spiralförmige Figur ?

b) Welchen Umfang hat sie ?

54) Gegeben ist die Folge $n \to a_n = \frac{n^2+3n-2}{n^2+3n+2}$.

a) Bestimme den Grenzwert a der Folge. Von welchem Glied an sind alle Glieder der Folge um weniger als 0,001 vom Grenzwert a entfernt ?

b) Berechne die Partialsummen s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.

c) Welche Vermutung ergibt sich für s_n ?

d) Beweise diese Vermutung durch vollständige Induktion.

55) Die Folge der sogenannten Dreieckszahlen ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n+1.$$

a) Bestimme die ersten fünf Dreieckszahlen.

b) Das allgemeine Glied a_n ist von der Form $a_n = u\,n^2 + v\,n + w$.
Bestimme u, v und w.

c) Beweise, dass die Summe $a_n + a_{n+1}$ von zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen eine Quadratzahl ist.

d) Beweise mit vollständiger Induktion, dass für die Summe der ersten n Dreieckszahlen gilt:

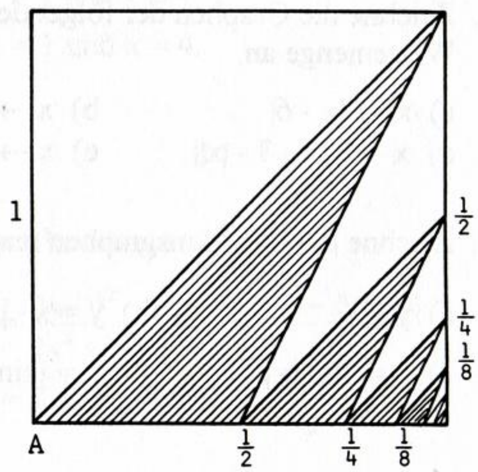
$$s_n = \frac{1}{6}\,n(n+1)(n+2).$$

56) Im Quadrat mit der Seitenlänge s = 1 wird, von A ausgehend, ein Streckenzug mit unendlich vielen Strecken eingezeichnet (siehe rechts).

a) Wie lang ist dieser Streckenzug ?

b) Wie gross ist der Flächeninhalt aller (unendlich vielen) hervorgehobenen Dreiecke ?

c) In diesen Dreiecken wird jeweils die Halbierende des stumpfen Winkels eingezeichnet. Wie lang sind alle Winkelhalbierenden zusammen ?



Übungsaufgaben M 12 Lösungen

1) Jede natürliche Zahl, die grösser als 5 ist, hat genau eine der folgenden Darstellungen: $6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+5\ (n \in \mathbb{N})$.
Die Terme $6n$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ liefern keine Primzahlen.

2) $a_n = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$. Da $n(n-1)$ gerade ist, ist der Achterrest des ganzen Terms gleich 1.

3) $(n-1)n(n+1)(n+2) + 1 = [(n-1)(n+2)][n(n+1)] + 1 = [n^2+n-2][\,n^2+n] + 1 = (n^2+n)^2 - 2(n^2+n) + 1 = ((n^2+n)-1)^2$

4) 159 305

5) a) 141 Glieder b) 1414 Glieder

6) 20 Glieder

7) 35, 32, 29 oder 2, 5, 8

8) 21

9) 238 Glieder

10) 0.5, 1.5, 4.5, 7.5

11) a) $n \leq 43$ b) $44 \leq n \leq 87$ c) $n \geq 88$

12) $a_1 = 64,\ a_5 = 20.25$ oder $a_1 = 448,\ a_5 = 141.75$

13) $q = \frac{2}{3}$

14) a) $x > -0.5$ und $x \neq 0$ b) $4 < x < 6$ oder $(-12 < x < 2$ und $x \neq 0)$

15) a) 25 b) 13.657 m

16) a) 3.4142 m b) $1.5469\,\mathrm{m}^3$

17) 9.4721 m

18) a) Beide Wege haben die Länge πr. b) $0.4\pi r^2$

21) $L = 117,\ Z(27, 18)$

22) a) $\frac{\pi(3+\sqrt{5})}{4} \approx 4.1124$ b) Beide haben die Länge $\frac{\pi}{2}$.
c) (1.17, 0.724)

19) $12r^2$

20) $8583.6\,\mathrm{cm}^3$

23) a) $a_1=50,\ a_{n+1}=a_n-3$
b) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n$
c) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n$
d) $a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n-1=a_n+2^{n+1}$
e) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n$
f) $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n+2=a_n+3\cdot 2^n$

24) a) monoton steigend, $[4, \infty)$
b) monoton steigend, $[\frac{1}{3}, \infty)$
c) monoton fallend, $(0, 3]$
d) alternierend, $(-\infty, \infty)$
e) monoton fallend, $(-\infty, -1]$
f) --- $[3, 5]$

25) a) monoton fallend, $(1, 2]$
b) monoton steigend, $[0, 1)$
c) monoton fallend, $(0, \frac{1}{2}]$
d) monoton steigend, $[\frac{1}{4}, 1)$
e) --- $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$
f) monoton steigend, $[\frac{5}{2}, 3)$

26) a) 30.72 b) 25 c) 486

27) 43

28) a) 96.75; 145.5; 194.25 b) +-72, 108, +-162

29) 4.6

30) $n = 9$

31) 27 und 48

32) 13, 26, 39, 52

33) -2, 1, 4

34) $F = 98.0\ \text{cm}^2$; 78.46° und 101.54°

35) -4, -1, 2, 5

Vollständige Induktion (Aufgaben 36 bis 38): es sind jeweils nur die entscheidenden Stellen angegeben.

36) $s_{n+1} = s_n+2n+1$

37) $s_{n+1} = s_n + 3^n$

38) $s_{n+1} = s_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

39) a) $p_n = n+1;\ p_{n+1} = p_n\cdot(1+\frac{1}{n+1})$ b) $p_n = \frac{3(2n+1)}{2n+3}$; $p_{n+1} = p_n\cdot(1+\frac{4}{(2n+1)(2n+5)})$

40) a) $z_{n+1} = 5^{n+1}-1 = z_n+4\cdot 5^n$ b) $z_{n+1} = 12^{n+1}-7^{n+1} = 7z_n+5\cdot 12^n$
c) $z_{n+1} = 4^{n+1}+2 = z_n+3\cdot 4^n$

41) a) $a=0$ b) $a=2$ c) bestimmt divergent d) $a=2$ e) unbest. divergent
f) unbestimmt divergent g) $a=1$ h) $a=0$ i) $a=1$

42) a) $n > \sqrt{k}$; ab 317.Glied b) $n > \frac{1}{2}(k+\sqrt{k^2-4})$; ab 100'000.Glied
c) $n > k^2+k\sqrt{k^2-1}$; ab $2\cdot 10^{10}$.Glied

43) a) -4 b) 12 c) (∞) d) 27 e) 3 f) 1.5
g) 11 h) -1 i) 0 k) $\frac{1}{3}$ l) (∞) m) $\frac{16}{3}$

44) a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{50}{7}$ c) 2 d) $\frac{3}{5}$ e) $2(2+\sqrt{2})\approx 6.83$ f) $16(2+\sqrt{3})\approx 59.71$

45) a) $a_1=\frac{5}{2}$ b) $q=\frac{9}{10}$ c) $a_1=12$ d) $q=\frac{3}{4}$

46) $a_1=12$

47) a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{6}{11}$ c) $\frac{181}{333}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{58}{225}$ f) $\frac{53}{110}$

48) a) 7 b) 39 c) 11

49) $q_1 = \frac{2}{3}$; $q_2 = \frac{2}{5}$

50) a) $|x| < 1$ b) $|x| < 1$ c) $-2 < x < 0$

51) 3 und 2 **oder** 15 und -10

52) 8

53) a) 16 cm² b) 27.3 cm

54) a) $a=1$; vom 62.Glied an b) $\frac{1}{3}, 1, \frac{9}{5}, \frac{8}{3}, \frac{25}{7}$ c) $s_n = \frac{n^2}{n+2}$ d) ---

55) a) 1, 3, 6, 10, 15 b) $u=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}, w=0$ c) Zeige, dass $a_n+a_{n+1} = (n+1)^2$ d) ---

56) a) $2\sqrt{2}+\sqrt{5}\approx 5.06$ b) $\frac{1}{3}$ c) 0.73