Prüfungsaufgaben M 17 L = K Lösungen

1) z_1 hat die imaginäre Komponente y, $z_2 = z_1^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ hat die imaginäre Komponente $2xy$. Diese sollen *gleich* sein, also: $y = 2xy$. Dies ist richtig für $y = 0$ oder für $x = \frac{1}{2}$, was man leicht sehen kann. Falls nicht:

$$y = 2xy \;\Rightarrow\; y - 2xy = 0 \;\Rightarrow\; y(1 - 2x) = 0$$

Jetzt hat man ein Produkt, das *Null* ergibt, was nur sein kann, wenn einer der Faktoren Null ist, also entweder $y = 0$ oder $1 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$.

Das sind aber nichts anderes als die Gleichungen *zweier Geraden* (die erste ist waagerecht, nämlich die x – Achse, die zweite ist senkrecht), also Antwort $\underline{\underline{\text{C)}}}$.

2) Der Abstand von z_1 vom Ursprung beträgt $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Der Abstand von $z_2 = z_1^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ vom Ursprung beträgt $|z_2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2}$ $= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = x^2 + y^2$. Diese gleichsetzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \;\overset{:\sqrt{x^2+y^2}}{\Rightarrow}\; 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; 1 = x^2 + y^2$$

. *Ein Kreis* ($\underline{\underline{\text{D)}}}$)

3) Zunächst ist $z_2 = z_1^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$. Damit die drei Punkte auf einer Geraden liegen, müssen die Steigungen zwischen z.B. z_1 und z_3 sowie z_2 und z_3 gleich sein (verwende zweimal z_3, weil der so einfache Koordinaten hat!)

$$\frac{y}{x+1} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} \;\Rightarrow\; y(x^2 - y^2 + 1) = 2xy(x+1)$$

. Dies ist sicher richtig, wenn $y = 0$ ist (eine Gerade). Sonst darf man durch y teilen: $x^2 - y^2 + 1 = 2x(x+1)$ $\Rightarrow\; x^2 - y^2 + 1 = 2x^2 + 2x \;\Rightarrow\; 1 = x^2 + 2x + y^2 \;\Rightarrow\; 2 = (x+1)^2 + y^2$, ein Kreis. $\underline{\underline{\text{E)}}}$

4) Hier sind die x – und die y – Koordinate jedes Punktes von einem *Parameter* t abhängig (man spricht von einer "parametrisierten Kurve"). Um den geometrischen Ort zu erkennen, versucht man den Parameter t zu eliminieren, so dass man nur noch eine Gleichung mit x und y hat: $x = 3\cos(t)$, $y = 2 + \sin(t)$. Hier genügt es, den Parameter *mitsamt* der umgebenden trigonometrischen Funktion aufzulösen und in die trigonometrische Identität $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ einzusetzen:

$$\underline{\underline{(y - 2)^2 + \frac{x^2}{9} = 1}}$$

, eine *Ellipse*.

5) Verwende das Additionsverfahren, und zwar subtrahiert man am einfachsten das i-Fache der unteren Gleichung von der oberen. Es bleibt übrig:

$2iz_2 = 2 + 4i \;\Rightarrow\; \underline{\underline{z_2 = 2 - i}}$. In die zweiten Gleichung eingesetzt:

$(1 - i)z_1 = 2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{z_1 = 1 + i}}$.

info@examprep.ch
Tel: +41 720 06 67

6) Diese Frage mag auf den ersten Blick überraschen, sind doch *komplexe Folgen* erst Thema für ein Hochschulstudium und stehen auch nicht auf der Liste der Begriffe, welche die ETH an der Aufnahmeprüfung zu prüfen gedenkt.

Jedoch handelt es sich um eine ganz spezielle Folge, und es ist durchaus einer ETH-Aufnahmeprüfung würdig, dass man Dinge, die man für die Prüfung gelernt hat, unerwartet kombinieren muss:

Es ist nämlich ganz wichtig, dass *hier* die komplexe Zahl im Zähler und im Nenner jeweils *dieselbe* ist. Man erkennt, dass im Nenner die grössere Potenz davon steht.

Leider gibt es im Komplexen keine *Ordnung*, so dass man nicht sagen kann, der Nenner „wächst schneller" als der Zähler, und tatsächlich ist der Grenzwert bei dieser Folge *nicht* Null, aber eine andere Methode, die bei reellen Folgen (mit Bruchtermen) gute Dienste leistet, führt hier ebenfalls zum Erfolg: Kürze $(4+5i)^n$!

Wie erwähnt kann es sein, dass man dies in seinem ganzen bisherigen Mathematikleben noch nie gemacht hat, aber die Idee sollte man aus dem Reellen kennen, die Umformung sollte man algebraisch ausführen können, und was dann noch an Rechenschritten mit komplexen Zahlen benötigt wird, sind alles elementare Operationen, die an der Prüfung explizit verlangt sind.

Also: $$a_n = \frac{2(4+5i)^n+3}{(4+5i)^{n+1}+6^{n+2}} = \frac{2+\frac{3}{(4+5i)^n}}{4+5i+36\cdot\left(\frac{6}{4+5i}\right)^n}$$

Nun könnte man vermuten, dass die Summanden mit den Brüchen auf der rechten Seite für n gegen Unendlich gegen Null gehen, was tatsächlich stimmt. Wenn man dies begründen wollte, so könnte man überlegen, was mit dem *Betrag* einer komplexen Division geschieht: Er ist gleich dem Quotient der Beträge! (Wiederum kann man nicht sagen, „die komplexe Zahl wird kleiner" sondern nur „ihr Betrag wird kleiner". In der Tat ist ja der Betrag von $|4+5i| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} > \sqrt{36} = 6$, also hat der Bruch des Nenners einen Betrag *kleiner als Eins*, so dass das Potenzieren mit immer grösserem Exponent eine Nullfolge erzeugt, beim Bruch des Zählers hingegen ist es wichtig, dass in seinem Nenner eine Zahl potenziert wird, deren Betrag *grösser als Eins* ist, so dass der Betrag des Nenners gegen Unendlich und wegen des konstanten Zählers dieser Bruch ebenfalls gegen Null geht.

Insgesamt also: Die Folge <u>konvergiert</u>.

So ausführlich muss das aber nicht begründet werden, es steht hier nur für das Verständnis während der Prüfungsvorbereitung. An der Prüfung würde sich eine Berechnung des Betrags gut machen (um zu zeigen, dass man darauf geachtet hat, ob es wirklich gegen Null geht), ansonsten schreibe man einfach bei beiden Brüchen einen Pfeil gegen Null und rechne weiter:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{4+5i}$$, wo die Terme die gegen Null gehen weggelassen wurden.

Da die Lösung in *Normalform* verlangt ist, muss man diese Division noch durchführen (mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners erweitern!):

$$a = \frac{2}{4+5i} = \frac{2(4-5i)}{16+25} = \underline{\underline{\frac{8}{41} - \frac{10}{41}i}}$$

info@examprep.ch
Tel: +41 720 06 67