Lösung Aufgabe 150 : Totalreflexion

Totalreflexion

Eine punktförmige Lichtquelle wird am Boden eines weiten Tanks angebracht und mit einer dünnen, kreisförmigen, lichtundurchlässigen Scheibe mit einem Radius $6,0\,\mathrm{cm}$ abgedeckt. Der Tank wird nun langsam mit einer klaren Flüssigkeit gefüllt, mit einer Dichte höher als die der Scheibe. Der Mittpunkt der Scheibe befindet sich immer senkrecht über der Lichtquelle. Ein Beobachter, der den Tank von oben aus grosser Distanz betrachtet, sieht Licht erst ab einer Füllhöhe von $5,0\,\mathrm{cm}$, von der Oberfläche heraustreten.

a) Zeichnen Sie den Strahlengang für Strahlen, die von der Quelle in verschiedene Richtungen an die Oberfläche und weiter abgehen.

b) Wie gross ist der Brechungsindex der Flüssigkeit ?

Lösung

a) Die lichtundurchlässige, kreisrunde Scheibe wird wegen ihrer geringeren Massendichte auf der Flüssigkeit schwimmen. Strahlen von der Lichtquelle am Boden des Tanks breiten sich in allen Richtungen in die Halbkugel nach oben aus. Nur Strahlen können aus der Flüssigkeit heraustreten, die in einem Kreiskegel mit dem Apex an der Quelle und mit dem halben Öffnungswinkel θ_{T} um den Flächennormalen sich ausbreiten. Der Winkel ist der *Grenzwinkel für Totalreflexion*, der durch die Brechungsindices der beiden Medien bestimmt ist, siehe Gl.(2) unten. Die Oberfläche schneidet den Kegel entlang eines Kreises. Licht kann aus dem Kreis heraustreten, wenn die Fläche nicht von der schwimmenden Scheibe gedeckt ist. Die Grösse des Kreises wird von der Füllhöhe der Flüssigkeit abhängen. Deckt die Scheibe gerade den Kreis, ist eine Bedingung gegeben, mit dem wir den Brechungsindex der Flüssigkeit berechnen können. Die Abb.1, 2 und 3 zeigen für steigende Füllhöhe den jeweiligen Strahlengang. Der Grenzfall, den wir suchen, ist in Abb.2 gezeigt. Strahlen, die am Mantel der Kegel liegen, sind Orange gefärbt.

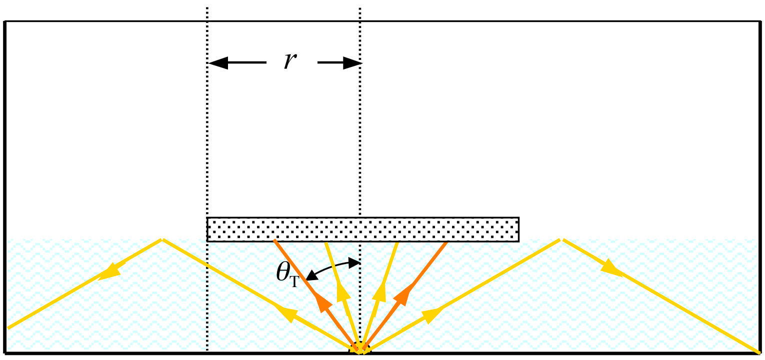

Abbildung 1: Es hat noch zu wenig Flüssigkeit im Tank. Bei dieser Füllhöhe blockiert die Scheibe alle Strahlen die nicht totalreflektiert werden.

b) Mit Index (1) wird das Medium bezeichnet, aus dem das Licht kommt, hier das optisch dichtere Medium, die Flüssigkeit, dessen Brechungsindex n_1 wir bestimmen wollen. Das optisch dünnere Medium darüber ist Luft mit $n_2 = 1,00$. Für die beiden Winkel zur Flächennormalen gilt nach Snellius:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \; ; \tag{1}$$

Verlässt ein Strahl die Lichtquelle unter dem Grenzwinkel θ_{T} zur Normalen, ist der Einfallswinkel an der Oberfläche $\theta_1 = \theta_{\mathrm{T}}$ und der gebrochene Strahl parallel zur Oberfläche, also $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Für den Grenzwinkel gibt uns Gl.(1):

$$n_1 \sin(\theta_{\mathrm{T}}) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sin(\theta_{\mathrm{T}}) = \frac{n_2}{n_1} \; ; \tag{2}$$

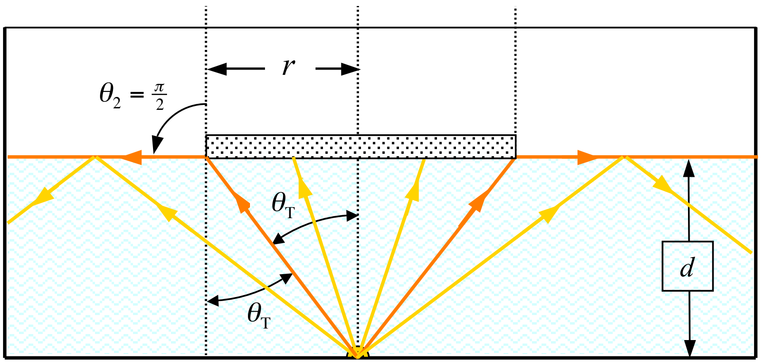

Abbildung 2: Der Grenzfall. Strahlen mit Einfallswinkel θ_T treffen die Kante der Scheibe und werden dort entlang der Oberfläche gebrochen. Ein Beobachter über dem Tank sieht Licht, das von der Flüssigkeit um der Scheibe gestreut wird.

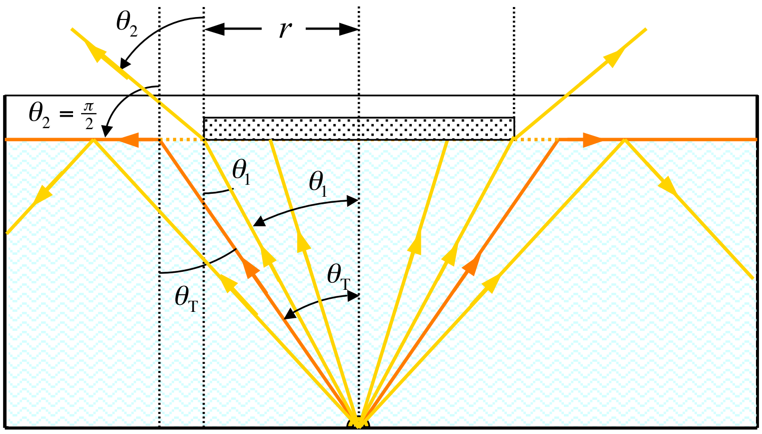

Abbildung 3: Zu viel Flüssigkeit im Tank. Jetzt können Strahlen von der Quelle im Winkelberech θ_1 bis θ_T an der Scheibe nach oben vorbei.

Der Radius des Kreises auf der Oberfläche, woraus Licht nach oben aus der Flüssigkeit treten kann, setzen wir gleich dem Radius r der Scheibe für den Grenzfall, wo die Scheibe im Abstand d über der Quelle schwimmt und gerade den Weg für Licht entlang der Oberfläche freigibt, siehe Abb.2. Ein Beobachter über dem Tank, sieht dann das Licht, das von der Oberfläche gestreut wird.

Für den Winkel θ_T bestimmen wir eine trigonometrische Beziehung mit dem Radius r der Scheibe und der Tiefe d (Abstand zur Lichtquelle) und setzen das Resultat Gl.(2)

ein:

$$\tan(\theta_{\mathrm{T}}) = \frac{r}{d} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(\theta_{\mathrm{T}})}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_{\mathrm{T}})}} = \frac{r}{d} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{n_2}{n_1}}{\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{r}{d} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \left(1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right)\left(\frac{r}{d}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(1+\left(\frac{r}{d}\right)^2\right) = \left(\frac{r}{d}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{r}{d}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{d}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

Wir lösen das Brechungsindex der Flüssigkeit und bekommen:

$$n_1 = \sqrt{n_2\left(\frac{d}{r}\right)^2+1} =$$

$$= \sqrt{(1,00)\left(\frac{0,050}{0,060}\right)^2+1} = \sqrt{1,69} = \underline{\underline{1,30}}\ ;$$

Hier haben wir die gegebene Werte für den Radius der Scheibe, 5,0 cm, und Tiefe der Flüssigkeit, 6,0 cm, sowie der Brechungsindex von Luft, $n_2 = 1,00$, eingesetzt.