4.1 Folgen und Reihen

4.1.1 Folge

Eine *geordnete Auflistung* von Zahlen (endlich oder unendlich) wird in der Mathematik *Folge* genannt. Beispiel: 1, 5, 3, 4, 12, –2.

Typische Fragen sind dabei:

- Welche Zahl kommt als *nächstes*?
- Was haben benachbarte Zahlen für eine *Beziehung* zueinander?
- Kann man *direkt* ausrechnen, welche Zahl an einer *bestimmten Stelle* in der Liste stehen muss?

Zunächst aber eine formale Definition, die es erlaubt, genauer über Folgen zu reden:

Folge, Glied, Index

Eine (reelle) **Folge** ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ und wird mit (a_n) bezeichnet.

a_i heisst i - tes **Glied** der Folge (Folgeglied),
und $i\in\mathbb{N}$ heisst **Index** (Platznummer) des Glieds.

Bemerkungen:

- Unterscheide gut von „gewöhnlichen" Funktionen, wo der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ ist. Begriffe wie „Ableitung" oder „Integral" sind für Folgen nicht definiert!
- Diese Definition gilt für *unendliche Folgen*. Um *endliche Folgen* zu erhalten, muss man den *Definitionsbereich* einschränken, es wird dann nur eine *endliche Teilmenge* der natürlichen Zahlen (z.B. die Zahlen von 1 bis 10) abgebildet. (Manchmal benutzt man auch eine *unendliche Teilmenge* der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich, z.B. nur die *geraden Zahlen*. Dann hat man ebenfalls eine *unendliche Folge*.)
- Ist der *Wertebereich* $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$, so spricht man von einer *komplexen* Folge.
- Die Folgeglieder müssen nicht alle *verschieden* sein, eine Funktion kann ja verschiedene Argumente auf gleiche Funktionswerte abbilden. Im extremsten Fall sind *alle Folgeglieder gleich*, man spricht von einer *konstanten Folge*.
  Bsp.: 2, 2, 2, ...
- Kleine Spitzfindigkeit: a_n bezeichnet ein „allgemeines" (zu einem beliebigen „*n*" gehörendes) Folgeglied, (a_n) hingegen eine ganze Folge.

Darstellungen von Folgen

Folgen können auf unterschiedliche Arten angegeben werden. Ein Beispiel:

Die Folge der Quadratzahlen in verschiedenen Darstellungen	
Auflistung:	1, 4, 9, 16, 25, ...
Explizite Definition:	$a_n = n^2$
Rekursive Definition:	$a_{n+1} = a_n + (2n+1),\ \ a_1 = 1$

Was ist damit jeweils gemeint?

Auflistung

Diese Form ist aus Rätselaufgaben vom Typ „wie lautet die nächste Zahl?“, z.B. auch in IQ-Tests, bekannt. Einige Glieder werden aufgezählt, und eine „Gesetzmässigkeit“ soll erkannt werden. Das ist natürlich alles andere als eindeutig, zu jeder endlichen Liste lassen sich beliebig viele (!) verschiedene, aber sinnvolle (was das genau heissen soll, ist eben die Frage!) Ergänzungen finden. Also werden wir diese Darstellung *nicht* verwenden, bzw. vereinbaren, dass stets die „offensichtlichste“ Ergänzung gemeint ist. (Vergleiche die Auslassungspunkte “...“ in mathematischen Termen wie $1 + 2 + ... + n$ und ähnlichen.)

Noch eine Bemerkung: Die Auflistung entspricht den Wertetabellen von Funktionen (s. [421]), wobei hier die Argumente, also die natürlichen Zahlen, weggelassen werden können, da sie ja einfach der *Platznummer* (Position der Zahl in der Folge), also dem *Index* entsprechen.

Explizite Definition

Dies entspricht der Angabe einer *Funktionsvorschrift*. Aus dem Index wird durch beliebige Operationen der Funktionswert, also das Folgeglied, berechnet. Die Bezeichnung „explizit“ soll andeuten, dass man *direkt* ein Folgeglied an *beliebiger Stelle* in der Folge errechnen kann. (Manchmal wird deshalb statt „explizite Definition“ auch der Begriff „direkte Definition“ verwendet.) [lat. „explicare“ = „erklären, entwickeln“]

Rekursive Definition

Bei der rekursiven Definition wird zur Berechnung eines Folgegliedes ein *vorangehendes* (oder mehrere vorangehende) Folgeglieder benutzt. Zusätzlich kann, aber muss nicht, auch der Index verwendet werden.

Dies bedeutet, dass man zur Berechnung eines Gliedes erst das oder die entsprechenden Vorgänger berechnen muss, man „läuft also zurück“, daher die Bezeichnung „rekursiv“ [lat. „recurrere“ = „zurücklaufen“].

Weil man nicht *unendlich weit* zurücklaufen kann (sonst hätte man das Glied *nie* fertig berechnet), muss zusätzlich zur Rekursionsvorschrift das *erste Glied* angegeben werden. (Man könnte auch sagen, dies sei die *Abbruchbedingung für die Rekursion*, sie gibt an, wann man aufhören kann, zurückzulaufen.)

Nochmal kurzgefasst zur Definition dieser beiden Begriffe:

Rekursive und explizite Definition einer Folge

Eine Folge ist **rekursiv** gegeben durch eine Vorschrift, wie jedes ihrer Glieder aus einem (oder mehreren) *vorangehenden Glieder* berechnet werden kann, allenfalls zusätzlich noch mit Hilfe des Index. Das erste Glied (oder die entsprechende Anzahl Anfangsglieder) müssen ebenfalls angegeben sein.

Eine Folge ist **explizit** gegeben durch eine Vorschrift, wie jedes ihrer Glieder *allein aus dem Index* berechnet werden kann.

Bemerkung: Für die (eindeutig existierende) *Folge der Primzahlen*, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ist bis heute weder eine rekursive noch eine explizite Darstellung bekannt, und auch keine absehbar...

Meist ist es leichter, die *Bildungsvorschrift* einer Folge rekursiv zu definieren als explizit.

Beispiel: 1, 11, 111, 1111, ... Vermutlich ist damit gemeint:

„hänge eine 1 an das Folgenglied, um das nächste zu erhalten (rekursiv)“, oder
„es sind genau soviele Ziffern 1 hintereinander, wie der Index angibt (explizit)“.

Aber wie soll man diese beiden sprachlichen Umschreibungen formal notieren?

Idee für die Rekursion ist schnell gefunden: $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1,\ \ a_1 = 1$. (Oder $a_{n+1} = 10^n + a_n$.)

Was aber für die explizite Darstellung? Jemand hat folgenden Vorschlag: $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

Wunderbar! Für jedes n ergibt sich genau eine Zahl mit n Ziffern 1 hintereinander. Man könnte sogar sagen, dass es recht klar ist, dass dies so ist. Trotzdem ist es nicht selbstverständlich, spontan auf diese Darstellung zu kommen!
(Heute kennt man *Methoden,* um aus manchen rekursiven Darstellungen eine explizite herleiten zu können. Stichwort „erzeugende Funktionen“ im Gebiet der „diskreten Mathematik“.)

Beruhigend ist die Tatsache, dass an der Prüfung *nicht* verlangt wird, eine explizite Darstellung *selbst* zu finden. Jedoch sehr wohl, die *Richtigkeit* einer angegebenen Darstellung nachzuweisen! (siehe Beispiel unten.)

Bemerkung zum ersten Teil der Aussage:
Manchmal enthält die angegebene explizite Darstellung einige Parameter, die man erst bestimmen muss. Dies ist aber leicht möglich, da man mit der rekursiven Darstellung beliebig viele Folgeglieder berechnen kann, um die nötige Anzahl Gleichungen (soviele, wie Parameter vorhanden) aufzustellen.

Bemerkung zum zweiten Teil der Aussage:
Warum ist es nötig, diese Richtigkeit nachzuweisen? Weil es eine Aussage für *unendlich viele Glieder* (zu jeder natürlichen Zahl eine) ist, und selbst wenn die Darstellung für sehr, sehr viele Zahlen übereinstimmt, muss sie nicht zwingend für alle übereinstimmen!

Zum Nachweis der Gültigkeit einer Aussage über unendlich viele Zahlen (die man *nicht* alle einzeln nachrechnen kann, das würde unendlich lange dauern!) ist wieder einmal eine *vollständige Induktion* an der Zeit. An der Prüfung wird übrigens genau im Zusammenhang mit der Verwandlung von rekursiver in explizite Folgendarstellung nach einer vollständigen Induktion (oft auch namentlich so) verlangt. Dazu ein Beispiel im Prüfungsstil:

Explizite Darstellung einer speziellen, rekursiv gegebenen Folge

Eine Folge ist rekursiv gegeben durch $a_{n+1} = a_n + (2n+1), \quad a_1 = 1$.

Weiter ist bekannt, dass eine explizite Darstellung dieser Folge die Form $a_n = p\,n^2 + q\,n + r$ hat. Die Parameter p, q und r sollen bestimmt und die Richtigkeit dieser Darstellung durch vollständige Induktion gezeigt werden.

Da drei Parameter zu bestimmen sind, berechnet man durch die Rekursionsvorschrift die ersten drei Glieder: $a_1 = 1$, $a_2 = a_{1+1} = a_1 + (2\cdot\mathbf{1}+1) = 4$, $a_3 = a_{2+1} = a_2 + (2\cdot\mathbf{2}+1) = 9$.
Die explizite Darstellung soll dieselben drei Glieder berechnen, also müsste gelten:
$p + q + r = 1$, $4p + 2q + r = 4$, $9p + 3q + r = 9$. Daraus findet man: $r = q = 0$, $p = 1$.
Die explizite Darstellung, falls sie wirklich diese Form hat, muss also lauten: $a_n = n^2$.
Nicht weiter erstaunlich, denn tatsächlich ist ja $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$. Aber wie kann man sicher sein, dass dies immer so bleibt, wenn man, wie die Rekursionsvorschrift angibt, jeweils den „doppelten Index des Vorgängergliedes plus Eins", oder, was dasselbe ist, den "doppelten Index minus Eins" addiert?
Also: $3^2 + (2\cdot 3+1) = 4^2$, oder $4^2 + (2\cdot 5-1) = 5^2$, stimmt beides, aber bleibt es immer so?

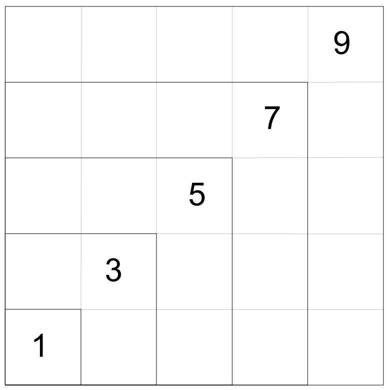
Bevor der Beweis durch vollständige Induktion angeführt wird, soll diese hübsche, bereits in der Antike bekannte Tatsache, noch anders und als Satz formuliert und auf drei (!) andere Arten bewiesen werden:

Die Summe der *n* ersten ungeraden Zahlen ist die *n*-te Quadratzahl

$$\sum_{i=1}^{n} 2n-1 \;=\; n^2$$

Beweise:

Geometrisch: Betrachte die Folge der Quadratzahlen, dargestellt durch Quadrate in einem Koordinatensystem, wobei zwei Seiten auf den Koordinatenachsen, also eine Ecke jeweils bei (0,0) liegen sollen und die gegenüberliegende Ecke bei (*n*, *n*):



Deutlich zu erkennen: Jedes nächstgrössere Quadrat unterscheidet sich von dem vorhergehenden in einem winkelförmigen Streifen, dessen Fläche zwei mal die Seitenlänge des vorhergehenden Quadrates (mal Eins) *plus* ein Einheitsquadrat in der Ecke, an dem diese beiden Rechtecke zusammenstossen entspricht.
Also: $2(n-1) + 1 = 2n - 1$.

Algebraisch: Die Zahl n^2 unterscheidet sich vom vorangehenden $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = n^2 - (2n-1)$ genau um $2n - 1$, also die entsprechende *ungerade Zahl.*

Analytisch: Als *arithmetische Reihe* (siehe unten) mit Anfangsglied 1 und Differenz 2: $s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(2\cdot a_1 + (n-1)d\right) = \frac{n}{2}\left(2 + 2n - 2\right) = n^2$.

Nun zur **vollständigen Induktion!**

Wir wollen zeigen: Die explizite ($a_n = n^2$) und die rekursive ($a_{n+1} = a_n + (2n+1),\ a_1 = 1$) Form liefern die *gleiche Folge*, d.h. für jedes n sind die jeweiligen Folgeglieder gleich.

Dazu zeigen wir zunächst, dass das *erste Glied* $a_1 = 1^2 = 1$ der expliziten Form gleich ist wie das bei der Rekursion angegebene erste Glied (durch einfaches Einsetzen von $n = 1$). Dies ist hier der Fall.

Dann setzen wir das *allgemeine Glied* a_n der expliziten Darstellung in die rekursive Darstellung ein und prüfen nach, ob dasselbe herauskommt, wenn wir „$n + 1$" in die explizite Darstellung einsetzen:

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$ Explizit: $a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Sie sind gleich, und der Beweis ist (zum 4. Mal) gelungen. ■

Die Fibonacci-Zahlen

Als schwierigeres Beispiel für eine vollständige Induktion soll hier eine berühmte Zahlenfolge dienen, die bereits einige Jahrhunderte vor Christus formuliert wurde, in Europa aber erst 1202 durch das „Liber abaci" des Leonardo von Pisa [1175 – ca. 1240, genannt Fibonacci] bekannt wurde. Die explizite Darstellung fanden mehrere Leute unabhängig voneinander erst im 18. Jahrhundert, also einige hundert Jahre später!

Die Folge der Fibonacci-Zahlen

Die Folge der Zahlen, beginnend mit 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, ... wobei die ersten beiden Glieder 1 und vom dritten Glied an *jedes Glied die Summe seiner beiden Vorgänger* ist, heisst Folge der **Fibonacci**-Zahlen.

Diese Definition ist rekursiv: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,.$

Explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ist eine **explizite Darstellung** der Folge der Fibonacci-Zahlen.

Beweis: Durch *vollständige Induktion:*

1. *Induktionsverankerung*: $n = 1$ *und* $n = 2$ in die explizite Darstellung einsetzen:

$$n=1:\quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$n=2:\quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1$$

2. *Induktionsschritt*: Zur Abkürzung wird gesetzt: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Angenommen, die explizite Darstellung stimme für a_n und a_{n-1}. (*Induktionsannahme*).
Dann soll damit gezeigt werden, dass die explizite Darstellung von
$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(p^{n+1} - q^{n+1}\right)$ der rekursiven Darstellung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ entspricht, also:
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(p^{n+1} - q^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(p^n - q^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(p^{n-1} - q^{n-1}\right)$.

Multiplikation mit $\sqrt{5}$ liefert: $p^{n+1} - q^{n+1} = \left(p^n - q^n\right) + \left(p^{n-1} - q^{n-1}\right)$.
Anders angeordnet: $p^{n+1} - q^{n+1} = \left(p^n + p^{n-1}\right) - \left(q^n + q^{n-1}\right)$. Dies stimmt, wenn $p^{n+1} = p^n + p^{n-1}$ und $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$ gelten würden. Diese beiden lassen sich noch durch p^{n-1} bzw. q^{n-1} teilen und vereinfachen sich zu $p^2 = p + 1$ bzw. $q^2 = q + 1$.

Bleibt nur noch, dies nachzurechnen:

$p^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = p + 1$, sowie

$q^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = q + 1$ ■

Monotone, beschränkte und alternierende Folgen

Monotone Folgen

Eine Folge (a_n) heisst *genau dann*

monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

monoton, wenn sie monoton wachsend *oder* fallend ist.

Bemerkung:

- Eine *konstante* Folge ist nach dieser Definition *sowohl* monoton wachsend *als auch* monoton fallend, aber natürlich keines davon *streng.*
- Das „genau dann, wenn" ($\Leftrightarrow$) in der Definition soll andeuten, dass die Ungleichheitsbedingung und der Ausdruck (wie bei jeder definierten Eigenschaft) gleichwertig sind: Eine monoton wachsende Folge erfüllt die Bedingung, umgekehrt ist jede Folge, welche die Bedingung erfüllt, monoton wachsend.
- Die obigen Ungleichungen lassen sich auch als Differenzen, oder wenn kein Folgeglied Null ist, auch als Quotienten schreiben, was den konkreten Nachweis von Monotonie manchmal einfacher durchführbar macht: Z.B. für monoton wachsend: $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (etc.)

Beschränkte Folgen

Eine Folge (a_n) heisst

nach oben beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

nach unten beschränkt, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $d \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

beschränkt, wenn sie *sowohl* nach oben *als auch* nach unten beschränkt ist,
wenn es also *zwei* Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $d \leq a_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
oder anders gesagt, wenn es eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man nennt so ein c **obere Schranke**, so ein d **untere Schranke**
und so ein e einfach eine **Schranke** der Folge (a_n).

Bemerkung:

- (Streng) monoton wachsende bzw. fallende Folgen sind nach unten bzw. oben beschränkt.

Alternierende Folgen

Eine Folge (a_n) heisst **alternierend**, wenn zwei benachbarte Glieder unterschiedliche Vorzeichen haben. Sie sind also abwechselnd positiv und negativ.

Bemerkung:

- *Formal:* $a_{n+1} > 0 \;\Leftrightarrow\; a_n < 0$. *Salopp:* „Sie hüpft über die x – Achse hin und her".

Konvergente Folgen, Grenzwert einer Folge

Für die Mathematik, (genauer: für die Analysis), ist es besonders interessant, wenn eine Folge *konvergiert*. Damit meint man, dass die Folgeglieder „einem Grenzwert zustreben", mit wachsendem *n* immer näher bei einer bestimmten Zahl liegen. Der Begriff der Konvergenz und seine genaue Definition hatte viele unerwartete und nützliche Konsequenzen.

Zunächst einige Beispiele (das vierte Beispiel ist sehr wichtig, daher in einem Kasten):

- $a_n = \frac{1}{n}$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Die Folgeglieder werden immer kleiner. Sie streben dem Grenzwert 0 zu. Eine solche Folge heisst auch *Nullfolge* (s.u.).
- $a_n = n$, also 1, 2, 3, 4, ... Die Folgeglieder werden beliebig gross, es gibt *keinen* Grenzwert, die Folge konvergiert *nicht*. Man sagt, sie *divergiert*.
- $a_n = (-1)^n$, also 1, –1, 1, –1, 1, –1, ... Die Folgeglieder sind abwechselnd positiv und negativ, (*alternierende* Folge, wie eben definiert). Hier ohne Grenzwert.

Die Eulersche Zahl als Grenzwert einer Folge [Leonhard Euler, 1707 – 1783]

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, also $2, 2.25, 2.370\ldots, 2.441\ldots, 2.488\ldots, 2.521\ldots, \ldots$

Die Konvergenz dieser Folge ist nicht ganz einfach zu beweisen, aber es existiert ein Grenzwert, und dieser Grenzwert wird **Eulersche Zahl**, ***e***, genannt.

Diese Folge kann zur *Definition von e* benutzt werden: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e} = 2.718\ldots$

(Weiter gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathbf{e}} = 0.367_8\ldots$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathbf{e}^x$)

Nun die genaue Definition von Konvergenz, Divergenz und Grenzwert bei Folgen:

Konvergente und divergente Folge, Grenzwert einer Folge

Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst **Grenzwert** (oder **Limes** [lat: Grenze]) der Folge (a_n),
wenn $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n > n_\varepsilon : |a - a_n| < \varepsilon$.
In Worten: „ ..., wenn es für jede beliebig klein gewählte, positive Toleranz $(\varepsilon > 0)$ eine Schranke ($n_\varepsilon \in \mathbb{N}$) gibt, so dass für jeden Index grösser als diese Schranke $(n > n_\varepsilon)$ gilt: das zugehörige Folgeglied unterscheidet sich von dieser Zahl um weniger als diese Toleranz $(|a - a_n| < \varepsilon)$."

Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Redeweise: „Limes von a_n für n gegen Unendlich gleich a"
„a_n strebt gegen a für n gegen Unendlich"

Wenn ein Grenzwert existiert, so nennt man die Folge **konvergent** (gegen *a*), andernfalls **divergent**. [lat. „convergere" = „sich hinneigen, annähern", „divergere" = „auseinandergehen"]

Bemerkungen:

- Man kann sich vorstellen, dass die Folgeglieder beginnend mit a_{n_ε} „ ε-Nähe" (-Umgebung) des Grenzwertes bleiben. Je nach Wahl von ε kann es verschieden lange dauern, also ist das n_ε von der Wahl des Epsilons abhängig (diese Abhängigkeit ist mit dem Epsilon als Index angedeutet).

- Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert, denn gäbe es mehrere, so müssten sie in ε-Nähe voneinander liegen, aber ε kann beliebig klein gewählt werden, also auch kleiner als der kleinste aller Abstände der verschiedenen Grenzwerte. Also müssen sie alle gleich (und somit ihre „Abstände“ 0) sein.
- Vorsicht! $\pm\infty$ sind keine Grenzwerte. Sonst könnte man eine Folge, die „gegen Unendlich geht“ als „konvergent mit Unendlich als Grenzwert“ bezeichnen.
  Man sagt genauer:

Bestimmte Divergenz, uneigentliche Grenzwerte

Eine Folge, die *keine obere (aber eine untere) Schranke* hat, heisst **bestimmt divergent** mit **uneigentlichem Grenzwert** $+\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\right)$.

Entsprechend heisst eine Folge, die *keine untere (aber eine obere) Schranke* hat, **bestimmt divergent** mit **uneigentlichem Grenzwert** $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

Bemerkungen:

- Kann eine Folge auch keine obere *und* keine untere Schranke haben? Ja, wenn sie „alternierend unbeschränkt“ gegen plus und minus Unendlich wächst, z.B. $(-1)^n n$.
- Es gelten folgende Beziehungen zwischen „beschränkt“ und „konvergent“:

  Eine Folge, die „*über jede Schranke hinauswächst*“ (bzw. „*unter jede Schranke sinkt*“), also *nicht beschränkt* ist, kann nicht konvergent sein. Sie ist also sicher divergent. Hat sie „in die andere Richtung“ jedoch eine Schranke, so ist es eine Divergenz auf eine ganz „bestimmte Art“. Daher die Bezeichnung „bestimmt divergent“.

  Monoton wachsende nach oben nicht beschränkte Folgen divergieren gegen plus Unendlich, monoton fallende nach unten nicht beschränkte Folgen divergieren gegen minus Unendlich.

  Jede konvergente Folge ist jedoch sicher beschränkt.

  Nicht jede beschränkte Folge muss jedoch konvergent sein.
- Die Schreibweise „der Limes ist Unendlich (oder minus Unendlich)“ ist nur eine *Bequemlichkeit*. Man soll nicht auf die Idee kommen, dieses „Unendlich“ *sei* „der Grenzwert“ der Folge. Eine *divergente* Folge hat ja gerade *keinen Grenzwert*. Daher spricht man zur „Warnung“ vor Verwechslung von einem „uneigentlichen Grenzwert“. (Siehe auch die letzte Bemerkung bei der vorigen Definition.)

Eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz einer Folge ist, dass die „Abstände“ benachbarter Folgeglieder immer kleiner werden. Dies ist jedoch *nicht* hinreichend. Wird jedoch der Abstand der Folgeglieder zu einer festen Zahl immer kleiner, so ist diese Zahl mit Sicherheit der Grenzwert. Genauer lässt sich „der Abstand wird immer kleiner“ mit dem Begriff „Nullfolge“ formulieren, der daher zunächst definiert werden soll:

Nullfolge

Eine Folge (a_n) mit Grenzwert 0 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$ heisst **Nullfolge**.

Dann gilt also:

Konvergenzkriterium mit Nullfolge

Ist (a_n) eine Folge mit Grenzwert g, so ist die Folge $(a_n - g)$ eine Nullfolge, und umgekehrt.

Bemerkungen:

- Um dieses Konvergenzkriterium anwenden zu können, muss man den Grenzwert also bereits kennen (man kann aber einen „vermuteten" Grenzwert so überprüfen.)

Beweis:

Dass diese beiden Aussagen äquivalent sind, folgt aus der *Definition* der Konvergenz bei Folgen: „(a_n) hat den Grenzwert g" bedeutet, dass die Differenz $|g - a_n|$ für genügend grosses n beliebig klein wird, und „$(a_n - g)$ ist eine Nullfolge" behauptet dasselbe für die Differenz $|0 - (g - a_n)| = |-g + a_n| = |g - a_n|$ (beachte, dass beim Betrag die Reihenfolge der Differenz keine Rolle spielt, da sich nur das Vorzeichen unterscheidet), also wird tatsächlich in beiden Aussagen *dasselbe* behauptet. ■

Der Satz ist auch ein Spezialfall einer der folgenden Rechenregeln für konvergente Folgen (benutze die Differenz zwischen (a_n) und der konstanten Folge g), zunächst wird aber auch nochmal die Beziehung zwischen Konvergenz und Beschränktheit formuliert:

Konvergenz und Beschränktheit. Rechenregeln für konvergente Folgen

Konvergente Folgen sind beschränkt. Umgekehrt gilt:
Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Sind (a_n) und (b_n) *konvergente* Folgen, so gilt für ihre Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n \quad (c \text{ konstant}), \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{falls } b_n \neq 0\,,\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\,)$$

Bemerkung:

- Wenn die Bestandteile der (nur auf die im obigen Satz angegebenen Arten) zusammengesetzten Folge also konvergent sind, so ist auch die zusammengesetzte Folge konvergent (eine *hinreichende* Bedingung). Die zusammengesetzte Folge kann aber auch konvergent sein, wenn einer oder alle Bestandteile *nicht* konvergent sind (man weiss es dann einfach nicht sicher, muss es also *anders* überprüfen). Mit anderen Worten, es ist eine *nicht notwendige* Bedingung, dass alle Bestandteile konvergieren.

Beweis:

- Konvergente Folgen sind beschränkt: Für ein beliebiges ε liegen alle Folgeglieder von einem gewissen n an zwischen $a+\varepsilon$ und $a-\varepsilon$ (wo a den Grenzwert der Folge bezeichnet), und *vor* diesem n liegen ja nur *endlich* viele Folgeglieder. Endliche (nichtleere) Mengen von reellen Zahlen haben aber immer ein Maximum und ein Minimum. Das Maximum und Minimum dieser vier Zahlen wiederum beschränken die Folge nach oben und nach unten.

- Angenommen, die Folge ist monoton wachsend (für fallend analog). Da sie beschränkt ist, gibt es eine obere Schranke. Wenn die Folge *keinen* Grenzwert hätte, so müsste es für *jeden beliebigen Wert der Folge* ein n geben, so dass alle Folgeglieder mit grösserem Index *grösser* als dieser Wert plus ein beliebig kleines, aber *positives* ε sind (wäre das nämlich nicht so, so wäre dieser Wert bereits ein Grenzwert der Folge, dann gäbe es nichts mehr zu beweisen). Denn sobald ein Wert grösser ist, müssen alle folgenden Werte gleich oder noch grösser sein, weil die Folge ja monoton wächst! Die Monotonie ist also eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz.
  Warum ist der Beweis dadurch gegeben? Da das ε nicht Null ist, kann man das Argument wiederholen, und wenn die Folge nicht konvergiert, würde man sich beliebig nahe der oberen Schranke nähern, dann wäre aber wiederum diese obere Schranke ein Grenzwert.

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$: *Wenn* die Grenzwerte der Folgen rechts *existieren (sie sollen mit* g_a *bzw.* g_b *bezeichnet werden), dann gibt es zu jedem* $\varepsilon>0$ ein $n_a\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n>n_a$ gilt: $|g_a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ und ein $n_b\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n>n_b$ gilt: $|g_b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. (Da $\varepsilon>0$ beliebig klein gewählt werden können muss in der Definition der Konvergenz, muss auch für $\frac{\varepsilon}{2}$ je ein n gefunden werden können!) Dann gilt aber für die *grössere* der beiden Zahlen n_a und n_b, sie soll mit n_0 bezeichnet sein: $|(g_a+g_b)-(a_n+b_n)| = |(g_a-a_n)+(g_b-b_n)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, also ist tatsächlich g_a+g_b der Grenzwert der Folge a_n+b_n.

- Die Rechenregeln für Minus, Mal und Durch werden ähnlich bewiesen. ■

In einem Beispiel oben wurde bereits der wichtige Grenzwert für e angegeben. Hier folgen nun einige wichtige Grenzwerte, die mit den obigen Regeln natürlich auch kombiniert werden können (unbedingt auch die Formelsammlung beachten!):

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1\ (c>0), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |c|<1 \\ 1 & \text{für } c=1 \\ +\infty \text{ (bestimmt divergent)} & \text{für } c>1 \\ \textit{unbestimmt divergent} & \text{für } c\le -1 \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Die erste Folge ist eine deutliche Nullfolge: Je grösser der Nenner ist, desto kleiner ist der Wert des Bruches (der Zähler ist ja konstant). Also ist es eine monoton fallende Folge die nie negativ wird (beschränkt!) und somit konvergiert.

- Die zweite Folge beschreibt, dass sich die „Wurzelfunktionen immer stärker biegen“, je grösser der Wurzelexponent ist (betrachte die Graphen dieser Funktionen!)
- Die dritte Folge ist sehr wichtig: Das eben beschriebene Verhalten „gewinnt“ sogar gegen einen „mitwachsenden“ Radikanden!
- Und die vierte Folge fasst das Verhalten der Potenzen zusammen, je nach Vorzeichen und Betrag der Basis.

Dieses „Gewinnen“ des einen oder anderen Verhaltens in einer Folge, wenn sich widersprechende Verhalten vorkommen, ist für das Bestimmen eines Grenzwerts (ohne grosse Rechnungen) sehr wichtig. Daher muss man auch die folgende Regel gut kennen. In der Formelsammlung finden sich zum Glück viele Kombinationen dieser Art, falls man in einem Fall nicht sicher sein sollte. Dennoch wird eine Prüfungsaufgabe sehr oft nicht *genau* so in der Formelsammlung zu finden sein, dann ist es unter Umständen nötig, sie zuerst algebraisch umzuformen oder ihre Bestandteile einzeln abzuschätzen. Die Regel kann da sehr nützlich sein:

Zunächst als Faustregel:

Verhalten der Exponential- und Logarithmusfunktion im Vergleich zu Potenzfunktionen

Exponentialfunktionen wachsen *schneller* als alle Potenzfunktionen,
Logarithmusfunktionen wachsen *langsamer* als alle Potenzfunktionen.

Dies bedeutet, dass wenn man in einer Folge einen Faktor hat, der gegen Unendlich strebt, und einen, der gegen Null strebt (das kann auch bedeuten, dass man einen Nenner hat, der gegen Unendlich strebt), so kann man nicht in jedem Fall sicher sein, ob das Produkt gegen Unendlich (wegen des einen Faktors) oder gegen Null (wegen des andern Faktors) strebt.

Wenn es sich jedoch um einen Fall handelt, bei dem der eine Faktor eine Potenz-, der andere aber eine Exponential- oder Logarithmusfunktion ist, hilft uns die Faustregel, wie folgender Satz zeigt:

Exponentialfunktion gewinnt gegen Potenzfunktionen, Logarithmusfunktion verliert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c^n} = \infty\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{e^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{c^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{\ln(n)} = \infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot e^n = \infty\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \ln(n) = 0\,.$$

4.1.2 Reihe

Werden die Glieder einer Folge *addiert*, so entsteht eine sogenannte *Reihe*. (Deren Summanden nennt man *auch* Glieder!) Bei *endlichen* Folgen ist das kein Problem, eine „endliche Reihe" ist einfach eine gewöhnliche Summe. Bei unendlichen Folgen ist es schon heikler: Was soll die Summe von unendlich vielen Zahlen („unendliche Reihe") bedeuten? Und ist eine solche Summe nicht automatisch unendlich gross bzw. klein?

Hinschreiben lässt sich eine unendliche Summe leicht:

$$1 + 2 + 3 + ..., \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + ..., \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ..., \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

Was soll aber damit gemeint sein? Wieder kommt uns der Grenzwertbegriff einer Folge zu Hilfe. Da *endliche* Summen kein Problem darstellen, betrachten wir bei *unendlichen Reihen* einfach die Folge der „endlichen Zwischensummen" (der sogenannten Partialsummen). Falls diese *Folge* konvergiert, wollen wir diesen Grenzwert als *die Summe der unendlichen Reihe*, und die Reihe ebenfalls als *konvergent* bezeichnen.

Reihe, Partialsumme (Teilsumme)

Die Summe der Glieder einer Folge (a_n) heisst **Reihe** dieser Folge, umgekehrt heisst die Folge (a_n) die der Reihe **zugrundeliegende Folge**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Die Summe der ersten n Glieder einer Folge (a_n) heisst ***n*-te Partialsumme** s_n (oder ***n*-te Teilsumme**) dieser Folge:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n$$

Konvergiert die Partialsummenfolge einer unendlichen Reihe, so heisst diese unendliche Reihe **konvergent**. Dann, und nur dann, kann der unendlichen Reihe *ein Wert* zugewiesen werden:

Die *Summe s* (auch **Wert** genannt) *einer unendlichen Reihe* ist definiert als der Grenzwert der Folge, welche von den Partialsummen gebildet wird:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

Andernfalls heisst die unendliche Reihe **(bestimmt / unbestimmt) divergent**, je nachdem, ob die Partialsummenfolge (bestimmt / unbestimmt) divergent ist.

Bemerkungen:

- Die Teilsummen einer Reihe bilden eine Folge, die Summe der Glieder einer Folge bildet eine Reihe. Klar?
- Nochmal der Unterschied zwischen unbestimmt und bestimmt divergent: Beides ist natürlich *nicht konvergent* (das bedeutet ja divergent), aber das muss nicht unbedingt heissen, dass eine Folge *unbeschränkt wächst* (egal ob gegen plus oder minus Unendlich). Falls es so sein sollte, nennt man sie *bestimmt divergent*. Andernfalls „nur" unbestimmt divergent (dann springt sie z.B. zwischen mehreren sogenannten „Häufungspunkten" immer hin und her und entscheidet sich *nie*.
- Bei vielen Folgen divergiert die zugehörige Teilsummenfolge, und die Reihe hat keinen (eigentlichen) Grenzwert. Dann hat es keinen Sinn, über den Summenwert zu reden (und war vor heutiger Definition oft Grund für Meinungsverschiedenheit.)
- Erst durch die Definition als Grenzwert von *endlichen Summen* (nämlich den Teilsummen) ist es *sinnvoll*, über unendliche Summen zu reden. Sonst gibt es so seltsame Ideen wie die Folgende:

Die Reihe von Grandi

Was könnte der Wert dieser (oben bereits erwähnten) *alternierenden unendlichen Reihe* sein: $1+(-1)+1+(-1)\pm\ldots=1-1+1-1\pm\ldots=?$
Wenn es wie bei endlichen Summen erlaubt wäre, die Glieder beliebig zu vertauschen bzw. in beliebiger Reihenfolge zusammenzuzählen, so wäre *jede beliebige ganze Zahl* ein vernünftiger anzunehmender Wert der Reihe, also unbrauchbar!

Die Definition mit Partialsummen führt jedoch auf die Folge 1, 0, 1, 0, ... , es existiert also kein Grenzwert, die Reihe ist divergent.

Bemerkung: G. Grandi [1671 – 1742] nahm an, der Wert sei $\frac{1}{2}$.

Wenn eine unendliche Reihe konvergiert, so konvergiert ja die Folge der Partialsummen. Eine konvergente Folge „bleibt aber von einem bestimmten Glied an in einer beliebig kleinen Nähe des Grenzwertes“. Die Folgenglieder der Partialsummen *unterscheiden* sich jedoch genau um die Summanden der Reihe, also müssen diese Summanden „von einem bestimmten Summand an beliebig klein bleiben“. Mit anderen Worten:

Die einer konvergenten unendlichen Reihe zugrundeliegende Folge ist eine Nullfolge

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so bilden ihre Glieder a_n eine Nullfolge.

Bemerkung:

- Die *Umkehrung* gilt jedoch nicht unbedingt! *Nicht jede* Nullfolge bildet eine konvergente Reihe. Dafür ist die *Kontraposition* natürlich richtig: Jede Folge, die *keine* Nullfolge ist, bildet sicher eine divergente Reihe.
- Man sagt, dies sei eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der Reihe. Siehe auch das Beispiel der *harmonischen Reihe*, das nach dem kleingedruckten Abschnitt folgt.

Die Folgenglieder die aufsummiert werden müssen (recht einsichtig!) eine Nullfolge bilden. Dass dies nur *notwendig*, aber nicht hinreichend ist, wird das folgende Gegenbeispiel zeigen. Man hat aber auch einige in der Praxis gut handzuhabende *hinreichende* Konvergenzkriterien gefunden, die hier nicht bewiesen werden sollen und auch an der Prüfung *nicht bekannt sein müssen* (sie sind aber zwingender Prüfungsstoff jeder Analysis I – Vorlesung). Was heisst hinreichend? Wenn eine Reihe eines dieser Kriterien erfüllt, so *weiss* man, dass sie konvergiert. Leider liefert das Kriterium nicht auch noch den *Grenzwert*. Aber es sagt, dass man sich auf die Suche machen kann, da der Grenzwert überhaupt *existiert*. Euler hat mit 28 Jahren die Reihe der reziproken Quadratzahlen zu $\frac{\pi^2}{6}$ bestimmt und so einen alten Wettstreit zwischen den Bernoulli-Brüdern beendet (sogenanntes „Basler Problem“).

Hinreichende Konvergenzkriterien für Reihen (Wurzel-/Quotienten-/Majoranten-Kriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert *absolut**:	Falls:
Wurzelkriterium	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}<1$ (>1 : divergent, $=1$: keine Aussage)
Quotientenkriterium	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ (>1 : divergent, $=1$: keine Aussage)
Majorantenkriterium	Es gibt eine sogenannte *konvergente Majorante* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (mit lauter nichtnegativen Gliedern, d.h. $\forall k:\ b_k\geq 0$) so dass $\exists n_0:\ \forall k>n_0:\ \lvert a_k\rvert<b_k$.

Bemerkungen:

- * Die *absolute* Konvergenz einer Reihe meint, dass auch die Reihe der Absolutbeträge konvergiert: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist. Das ist eine „stärkere" Konvergenz, es gibt nämlich viele Beispiele von konvergenten *alternierenden* Reihen, die jedoch *nicht absolut* konvergieren (das „Alternieren" ist in diesen Beispielen also nötig für die Konvergenz). Deshalb ist es nützlich, wenn ein Konvergenzkriterium auch *absolute* Konvergenz garantieren kann. Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz (was man beweisen muss und kann!), aber wie gesagt nicht notwendigerweise umgekehrt.
- Das Majorantenkriterium kann man sich so vorstellen, dass man bei der „konvergenten Majorante" unendlich viele Zahlen addiert, aber eine endliche Summe erhält. Wenn nun jedes Glied der „majorisierten" Reihe (also die, deren Konvergenz man untersucht) *kleiner* als das an derselben Stelle stehende Glied der Majorante ist, muss auch die ganze Summe einen kleineren Wert haben, und kann daher nicht beliebig gross werden. Aber die Bedingung ist an die *Beträge* der Glieder gestellt! Das ist nötig, denn eine *negative* Zahl ist ja *immer* kleiner als eine positive Zahl (die Glieder der Majorante sind alle als nichtnegativ gefordert!), egal wie gross deren Betrag ist, also könnte die Reihe sonst gegen $-\infty$ divergieren. Mit Beträgen aber ist dies nicht möglich, was man leicht so einsieht: Zählt man die positiven und negativen Glieder *separat* zusammen, so bilden sie als Teilsumme *höchstens* eine Zahl die dem positiven bzw. *mindestens* dem negativen Wert der Majorantensumme entspricht, und das sind beides endliche Werte. Der Wert der Reihe ist dann die Summe dieser positiven und negativen Zahl, also immer noch endlich.

  Umgekehrt kann man sicher sein, dass eine Reihe *nicht konvergiert* (also divergent ist), wenn entsprechend ein „Minoranten"-Kriterium erfüllt ist: **Minorantenkriterium:** es gibt eine sogenannte *divergente Majorante* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (mit lauter nichtnegativen Gliedern, d.h. $\forall k:\ b_k \geq 0$) so dass $\exists n_0:\ \forall k > n_0:\ a_k < b_k$. (Beachte, dass es hier natürlich keine Betragsstriche braucht!) Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bestimmt divergent.*
- Für alternierende Reihen gibt es auch noch das sogenannte **Leibnizsche Konvergenzkriterium**: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,\ \ \forall k:\ a_k > 0$ (nur umständlich geschrieben, dass sie *tatsächlich* alterniert) ist *konvergent,* wenn (a_n) eine *monotone Nullfolge* ist (d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_{n+1} \leq a_n\ \ \forall n \geq n_0$).
- Das n_0 in den beiden letzten Bemerkungen stammt daher, dass es genügt, wenn *von einem bestimmten Moment an* die Bedingungen erfüllt sind, denn nur die *unendlichen* Summen sind ein Problem. Eine „endliche Zeit lang" darf die Reihe machen was sie will, endliche Summen existieren stets! Oder anders gesagt: „Das Entfernen (oder Hinzufügen) *endlich* vieler Glieder zu einer Reihe *ändert* ihr Konvergenzverhalten *nicht*." Also kann man alles rausnehmen, was die Bedingungen stört bzw. Fehlendes ergänzen, solange es nur *endlich viele* sind, und diese nach dem Berechnen des Grenzwerts problemlos (da endlich) wieder addieren bzw. subtrahieren.

Die Harmonische Reihe

Die Reihe zur Folge der Reziproken der natürlichen Zahlen $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$ heisst

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Die zugrunde liegende Folge ist eine *Nullfolge,* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber es gilt:

Die Harmonische Reihe divergiert (trotz zugrundeliegender Nullfolge)

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$, die harmonische Reihe **divergiert**.

Beweis: Die Summanden der Reihe werden folgendermassen zusammengefasst: die ganze Eins zu Beginn lässt man sein. Danach werden immer ein, zwei, vier, acht, usw. Summanden zusammengenommen:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots=1+\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)+\ldots$$

Da $\tfrac{1}{3}>\tfrac{1}{4}$, ist $\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)>\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{1}{2}$, da $\tfrac{1}{5}>\tfrac{1}{8}$, $\tfrac{1}{6}>\tfrac{1}{8}$ und $\tfrac{1}{7}>\tfrac{1}{8}$, ist auch $\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)>\tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{2}$ usw. , also: $1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots$ ■

Bemerkung:

- Die Teilsummen wachsen sehr langsam. Die zugrunde liegende Folge ist ja eine Nullfolge, und die Summanden werden immer kleiner und kleiner. Nur werden sie „nicht schnell genug“ kleiner: Die Summe *wächst über jede beliebige Schranke* hinaus, es dauert einfach jeweils „sehr lange“ (d.h. es sind viele Summanden nötig, aber es hat ja unendlich viele!).
- In der Schule untersucht man manchmal die speziellen uneigentlichen Integrale der Funktionen $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. Für die entsprechenden Reihen gilt: Die harmonische Reihe ist wie eben gesehen divergent. Die *alternierende* harmonische Reihe jedoch konvergent (gemäss dem *leibnizschen Konvergenzkriterium, siehe weiter unten, auch kleingedruckt)*, gegen $\ln(2)$. Nun gilt (ohne Beweis!): $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ *divergiert* für $\alpha\le 1$ (1 entspricht ja der harmonischen Reihe), *konvergiert* aber für $\alpha>1$ (z.B. für $\alpha=2$ gegen $\frac{\pi^2}{6}$, alternierend gegen $\frac{\pi^2}{12}$.)

Wie so oft hat man (vielleicht mit viel Mühe) die Konvergenz von einigen typischen und häufigen Reihen nachgewiesen und erhält als nächstes eine Aufgabe, eine *sehr ähnliche* Reihe zu untersuchen. Darf man annehmen, dass *auch diese* Reihe konvergiert, weil sie einer *anderen gleicht*, von der man dies schon weiss?

Vergleiche mit den Ableitungsregeln: Kann ich aus den Ableitungen einiger häufiger Funktionen auf die Ableitung einer Funktion schliessen, die aus diesen Funktionen irgendwie zusammengesetzt ist (ihr also „gleicht“)? Die Antwort ist: „Ja, wenn man weiss, wie.“ Oder genauer: Es gibt *Regeln*, „wann“ auf die Konvergenz geschlossen (wie aus den Ableitungen der Bauteile die Ableitung des Ganzen gewonnen) werden kann.

Kurz gesagt: Man benutzt nur Regeln, die natürlich zunächst bewiesen wurden (sozusagen „ein für alle Mal“), jetzt dafür Arbeit ersparen.

Rechenregeln für konvergente Reihen

Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ konvergent, und ist $c\in\mathbb{R}$ konstant,

so sind auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ sowie $\sum_{k=1}^{\infty}c\cdot a_k = c\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **konvergent.**

Bemerkungen:

- In Worten: Konvergenz verträgt sich mit Summe und konstanten Faktoren (und daher auch mit Differenzen: klar, wieso das daraus folgt?).
- Das bedeutet, dass man die Folgenglieder einer Reihe etwas aufspalten kann und wenn man Glück hat auf bekannte, konvergente Folgen als Bauteile stösst.
- Man denke sich ein möglichst einfaches Beispiel von zwei sicher konvergenten Folgen aus, bei denen die Reihe der Produkte der jeweiligen Glieder jedoch *nicht konvergiert.* (Dafür scheint es ja keine Regel zu geben, sonst stünde sie bestimmt im obigen Satz! Und vor allem: Bei *Folgen galt dies ja noch* (s.o.)!)

4.1.3 Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

Zwei wichtige Arten von Folgen bzw. Reihen sind die sogenannte arithmetischen und geometrischen Folgen bzw. Reihen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Differenz bzw. der Quotient aufeinanderfolgender Folgeglieder konstant ist, oder anders gesagt:
„Es wird immer dieselbe Zahl addiert bzw. multipliziert“ um das nächste Glied zu erhalten.

Vor dieser Definition noch ein kleiner Ausflug zu den sogenannten *Mittelwerten*, von welchen die Bezeichnungen „arithmetisch“ und „geometrisch“ stammen:

Arithmetisches, geometrisches, harmonisches, quadratisches Mittel von Zahlen

$\overline{x} = \overline{x}_a = \frac{a+b}{2}$ heisst **arithmetisches Mittel** der beiden Zahlen *a* und *b*,

$\overline{x}_g = \sqrt{a \cdot b}$ heisst **geometrisches Mittel** der beiden Zahlen *a* und *b*,

$\overline{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ heisst **harmonisches Mittel** der beiden Zahlen *a* und *b*,

$\overline{x}_q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ heisst **quadratisches Mittel** der beiden Zahlen *a* und *b*.

Bemerkungen:

- Die Redeweise „Mittel“ ist eine Kurzform für „Mittelwert“.
- Der Mittelwert wird mit einem Querstrich bezeichnet.
  Wenn nichts weiter angegeben ist, ist das *arithmetische Mittel* gemeint.
- Mittelwerte können ebenso von mehr als zwei Zahlen gebildet werden. Bei *n Zahlen* muss jeder Nenner oder Zähler 2 durch *n ersetzt* werden. Beim *geometrischen Mittel* ist es dann die *n-te Wurzel, beim quadratischen hingegen nicht!*
- Tatsächlich liegen sämtliche Mittel zwischen der kleinsten und der grössten verwendeten Zahl, aber (z.B. bei zwei Zahlen) nicht unbedingt „genau in der Mitte“. Diese Mittelwertvorstellung stammt vom arithmetischen Mittel.
- Vergleiche z.B. auch die drei Ecken eines Dreiecks: Wird das *arithmetische Mittel* der Koordinaten der Ecken berechnet, erhält man den *Schwerpunkt*. Der fällt nicht unbedingt zusammen mit dem *Mittelpunkt des Umkreises* oder dem *des Inkreises*.
- Die verschiedenen Mittelwerte sind für *verschiedene* Zahlen stets *verschieden voneinander,* bei gleichen Zahlen stets gleich (und zwar gleich dieser Zahl).

  Es gilt aber eine Aussage über die „Reihenfolge“ der verschiedenen Mittel:

Die Mittel-Ungleichung („HGAQ“)

Für die verschiedenen Mittelwerte gilt folgende Anordnung: $\overline{x}_h \le \overline{x}_g \le \overline{x}_a \le \overline{x}_q$

Bemerkung:

- Der Beweis wird hier nicht geführt.

Arithmetische Folge

Eine Folge, bei der die *Differenz* ***d*** zweier aufeinanderfolgender Glieder („hinteres minus vorderes") *konstant* ist, heisst **arithmetische Folge**: $d = a_{n+1} - a_n \ (\forall n > 1)$.

Bemerkungen:

- Umformen dieser Bedingung ergibt eine *Rekursionsvorschrift*: $a_{n+1} = a_n + d$.
  Man erhält also jeweils das *nächste Glied* durch Addition derselben Zahl *d.*
- Dies ergibt sofort auch eine *explizite* Darstellung, denn um zum *n*-ten Glied zu gelangen, muss man lediglich $(n-1)$ mal die Zahl d addieren: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
  Mit anderen Worten: Durch das Anfangsglied a_1 und die Differenz *d* ist eine arithmetische Folge *eindeutig bestimmt*.
- Jedes Glied (ausser dem ersten) ist das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn. Daher auch die Bezeichnung „arithmetische Folge": $a_n = a_{n-1} + d$,
  also $a_{n-1} = a_n - d$. Daraus folgt: $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$
- Man spricht genauer von einer „Arithmetischen Folge erster Ordnung", denn es gibt auch Folgen, bei denen erst die *Differenzen* (aufeinanderfolgender Folgeglieder) eine arithmetische Folge bilden. Solche Folgen werden dann arithmetische Folgen zweiter Ordnung genannt usw.

Summe der endlichen arithmetischen Reihe

Ist a_n eine *arithmetische Folge*,
so gilt für die *n*-te Teilsumme s_n ihrer Reihe: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Beweis: Nach einer Idee, die dem *jungen Gauss* [1777 – 1855] zugeschrieben wird (siehe unten):

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + ... + (a_1+(n-1)d)$$

Fasst man das erste und das letzte, das zweite und das zweitletzte ... Glied zusammen, so erhält man immer $2a_1+(n-1)d$, und somit:

$$s_n = \tfrac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Eine andere Beweisidee: Man schreibt die Reihe zweimal in entgegengesetzter Reihenfolge untereinander und addiert jeweils übereinanderstehende Glieder:

$$\begin{array}{rcccccccc} s_n = & a_1 & + & (a_1+d) & + ... + & (a_1+(n-2)d) & + & (a_1+(n-1)d) \\ s_n = & (a_1+(n-1)d) & + & (a_1+(n-2)d) & + ... + & (a_1+d) & + & a_1 \\ \hline 2s_n = & (2a_1+(n-1)d) & + & & ... & & + & (2a_1+(n-1)d) \end{array}$$

Und man erhält wieder dasselbe. ■

Bemerkungen:

- Kurz: Das erste und das letzte Glied addieren, mit der Anzahl Glieder multiplizieren und das Produkt halbieren.
- Die *unendliche arithmetische* Reihe divergiert, da eine arithmetische Folge keine Nullfolge sein kann. Genauer gesagt ist eine unendliche arithmetische Folge und damit auch die zugehörige Reihe sogar *bestimmt* divergent.

Ein wichtiger Spezialfall einer arithmetischen Reihe entsteht aus der Folge der *natürlichen Zahlen*. Was ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen? 1 + 2 + 3 + ... + n = ?

Summe der ersten n natürlichen Zahlen (Formel des jungen Gauss*)

Die ersten n natürlichen Zahlen 1, 2, ... , n bilden eine *arithmetische Folge* mit $a_1 = 1$ und $d = 1$. Für ihre Summe gilt also: $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$.

* Eine Anekdote besagt, dass der neunjährige Gauss im Unterricht die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen, mithilfe einer solchen Überlegung, wie sie im obigen Beweis verwendet wird, in unerwartet kurzer Zeit lösen konnte. Wodurch der Lehrer, der sonst eher für seinen Jähzorn bekannt war, das mathematische Talent des Knaben erkannte und ihn fortan förderte.

Geometrische Folge

Eine Folge, bei der der *Quotient* $\boldsymbol{q}$ zweier aufeinanderfolgender Glieder („hinteres durch vorderes") *konstant* ist, heisst **geometrische Folge**: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(\forall\, n>1)$.

Beachte: Alle $a_n \neq 0$!

Bemerkungen:

- Umformen dieser Bedingung ergibt eine *Rekursionsvorschrift*: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Man erhält also jeweils das *nächste Glied* durch Multiplikation derselben Zahl q.
- Dies ergibt sofort auch eine *explizite* Darstellung, denn um zum n-ten Glied zu gelangen, muss man lediglich $(n-1)$ mal mit q multiplizieren: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Mit anderen Worten: Durch das Anfangsglied a_1 und den Quotienten q ist eine geometrische Folge *eindeutig bestimmt*.
- Jedes Glied (ausser dem ersten) ist das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn. Daher auch die Bezeichnung „geometrische Folge": $a_n = a_{n-1} \cdot q$, also $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$. Daraus folgt: $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q} = \sqrt{a_n^2} = a_n$.

Summe der endlichen geometrischen Reihe

Ist a_n eine *geometrische Folge* mit $q \neq 1$, so gilt für die n-te Teilsumme s_n ihrer Reihe: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

Beweis: Wieder ein klassisches Beispiel für eine *vollständige Induktion*. Ebenso wäre es möglich, auf der rechten Seite die Polynomdivision durchzuführen, es würde sich genau die linke Seite ergeben. Hier soll aber noch eine *dritte*, elegantere Version gezeigt werden. Dazu wird die Behauptung, $s_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$, zunächst umgeformt zu: $s_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$, und einfach nachgerechnet:

$$
\begin{aligned}
s_n(q-1) &= (a_1 + a_2 + ... + a_n)(q-1) \\
&= (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1})(q-1) = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})(q-1) \\
&= a_1((q + q^2 + ... + q^n) - (1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})) = a_1(q^n - 1) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Ein Beispiel einer endlichen geometrischen Reihe ist die Zinseszinsformel:

Zinseszinsformel

Wird ein Kapital K_1 zu $p\%$ verzinst, so ist es nach einem Jahr zu $K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, und nach n Jahren zu $K_{n+1} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ angewachsen.

Dies entspricht einer geometrischen Reihe mit $a_1 = K_1$ und $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Summe der unendlichen geometrischen Reihe

Die unendliche *arithmetische* Reihe divergiert in jedem Fall. Die unendliche *geometrische* Reihe hingegen kann unter bestimmten Umständen konvergieren. Dies sind für praktische Anwendungen sehr wichtige Beispiele (da man dann *nicht* die Folge der Partialsummen auf Konvergenz prüfen muss) und *ein sehr häufiges Prüfungsthema*!

Summe der unendlichen geometrischen Reihe

Ist a_n eine *geometrische Folge* mit $|q| < 1$, so **konvergiert** die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$

Beweis: Für $|q| < 1$ ist q^n eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Somit gilt für die Folge der Teilsummen s_n: $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \frac{0-1}{q-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$. ■

Bemerkungen:

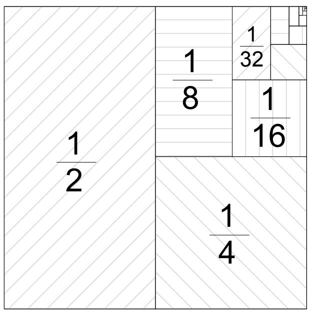
- Ist $q < 0$, so ist die Folge alternierend, aber kann dennoch konvergieren.
- Ist $q = 1$, so ist die Folge *konstant* (und kann somit zugleich als *arithmetisch* mit $d = 0$ aufgefasst werden) und die Reihe divergiert.
- Ist $q > 1$, so ist die Folge *bestimmt* divergiert, für $q < -1$ *unbestimmt* divergent.

Die Reihe der reziproken Zweierpotenzen konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

(unendliche geometrische Reihe mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$.)

Dies ist ein sehr anschauliches Beispiel: man kann sich vorstellen, von einer gegebenen Grösse zunächst die Hälfte, dann vom verbliebenen Rest jeweils wieder die Hälfte, also nacheinander einen Viertel, dann einen Achtel usw. zu nehmen. Fährt man unendlich lange auf diese Weise fort, so verbleibt ein immer kleinerer Rest des ursprünglichen Ganzen noch zu nehmen übrig:



Ein weiteres häufig gemachtes Beispiel ist die Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch. Solche Zahlen können nämlich als unendliche geometrische Reihen aufgefasst werden:

Periodische Dezimalzahl als geometrische Reihe

$0.63636363\ldots = 0.\overline{63}$ lässt sich als geometrische Reihe schreiben:

$0.\overline{63} = \frac{63}{100} + \frac{63}{10'000} + \frac{63}{1'000'000} + \ldots$, es ist also $a_1 = \frac{63}{100}$ und $q = \frac{1}{100}$.

Die Reihe konvergiert, da $|q| < 1$, gegen $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$

Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

	Arithmetisch	***Geometrisch***
Definierende Eigenschaft	$d = a_{n+1} - a_n$ Differenz konstant	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Quotient konstant
Rekursive Form	$a_{n+1} = a_n + d\,, \quad a_1$	$a_{n+1} = a_n \cdot q\,, \quad a_1$
Explizite Form	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Beziehung zu den Nachbarn	$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$ arithmetisches Mittel	$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = a_n$ geometrisches Mittel
endliche Reihe	$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \quad (q \neq 1)$
unendliche Reihe	divergiert!	$s = \frac{a_1}{1-q}$, falls $\lvert q \rvert < 1$

Bemerkung: Der „sprechende" übliche Variablenname d bzw. q ist *sprachabhängig!*

4.1.4 Reihenentwicklungen von Funktionen

Für die *Anwendungen der Mathematik* in der Technik sind die sogenannten Potenzreihendarstellungen von Funktionen sehr wichtig.

Jede Funktion lässt sich darstellen als Potenzreihe (Summe von unendlich vielen Gliedern, in denen jeweils eine Potenz der Variablen der Funktion steht, daher der Name).

Eine Möglichkeit ist die sogenannte *Taylorreihe*, welche mit den Ableitungen einer Funktion gebildet wird.

Das Interessante an einer solchen Reihe ist, dass ihre Glieder für jeden Wert, den man für x einsetzt, eine *Nullfolge* bildet: Die Glieder werden immer kleiner. Das muss natürlich so sein, wenn behauptet wird, dass die Reihe für jeden eingesetzten Wert von x gegen den *Funktionswert* an dieser Stelle konvergiert: Konvergente Reihen haben ja eine Nullfolge als erzeugende Folge. Für die *technische Anwendung* bedeutet dies aber: wenn von vornherein feststeht, wie genau die Näherung sein muss (ein Taschenrechner z.B. rechnet nur mit einer endlichen, festen Zahl von Nachkommastellen), kann die Reihe abgebrochen werden, sobald die Folgenglieder unter diese Abweichung fallen (denn sie werden von da an nur noch kleiner).

Deshalb brauchen heutige Taschenrechner die Werte der trigonometrischen Funktionen nicht mehr gespeichert zu haben (als Ersatz für die Logarithmentafeln der vorelektronischen Zeit sozusagen), sondern können in nützlicher Frist mit einigen Additionen, Multiplikationen und Divisionen die Werte in der gewünschten Genauigkeit jederzeit neu ermitteln.

Hier also einige Beispiele (siehe auch in der Formelsammlung!):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \pm \ldots \quad (|x| < 1)$$

Wer mag, kann sich an diesen Beispielen überlegen, dass die Ableitung von e^x wieder e^x ist, dass der Sinus abgeleitet den Kosinus ergibt, dass $\ln(x)$ abgeleitet $\frac{1}{x}$ ergibt und ähnliches.

Dies können jedoch nur Stichworte bleiben, unter denen in grösseren Mathematikbüchern oder ähnlichem nachgeschlagen werden kann. An der Prüfung wird dies natürlich nicht verlangt.