Prüfungsaufgaben M 12 L = K (1 – 5), L (6 – 20) Lösungen

1) Von 1 bis 9 stehen 9 einstellige Zahlen in der Liste, also sind es die ersten 9 Stellen. Von 10 bis 99 stehen 90 zweistellige Zahlen drin, also sind es weitere 180 Stellen. Die 900 dreistelligen Zahlen würden bereits 2700 weitere Stellen brauchen, also steht die 341. Stelle in einer dreistelligen Zahl aus der Liste.

Die ein- und zweistelligen Zahlen füllen zusammen die ersten 189 Stellen. 341 – 189 = 152. 152 Stellen reichen für die ersten 50 dreistelligen Zahlen, und die 152. Stelle (in den dreistelligen Zahlen) ist die 2. Stelle in der 51. dreistelligen Zahl, das ist 150, also ist das eine $\underline{\underline{5}}$.

2) Da $a_n = (n+2)^3 - 3(n+2)^2 + 3(n+2) - 1$ eine *Folge* darstellen soll, können für n nur die Zahlen 1, 2, 3, ... (allenfalls 0), aber leider nicht –2 eingesetzt werden.

Trotzdem wäre ein möglicher Lösungsansatz, einige verschiedene Folgeglieder auszurechnen und nachzusehen, welche Teilbarkeitseigenschaften sie haben:

$a_1 = 8,\ a_2 = 27,\ a_3 = 64$. Bereits scheiden A, B, D, E aus und C muss richtig sein.

Wenn man aber *sicher* sein will, dass C tatsächlich richtig ist, muss man für *alle* a_n zeigen, dass sie durch $n + 1$ teilbar sind. Dies kann man durch vollständige Induktion tun oder dadurch, dass man die Polynomdivision macht und sieht, dass sie aufgeht, unabhängig vom Wert von n. (Dazu muss man das gegebene Polynom natürlich zuerst ausmultiplizieren.)

Man erhält: $(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) : (n + 1) = n^2 + 2n + 1$.

Wer natürlich sieht, dass $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$, oder sogar direkt, dass $(n+2)^3 - 3(n+2)^2 + 3(n+2) - 1 = \big((n+2) - 1\big)^3$, muss nicht mehr dividieren. (Und der Verdacht dazu könnte einem schon bei 8, 27, 64 = 2^3, 3^3, 4^3 gekommen sein...)

Eine letzte Bemerkung bzw. Möglichkeit: Aus der Theorie über Polynome weiss man, dass ein Polynom in x durch $(x - a)$ teilbar ist, wenn a eine Nullstelle des Polynoms ist. Hier bedeutet das, dass man für B, C, D, E: 0, –1, –2, –3 einsetzen kann und prüfen, ob es Null ergibt. Die Werte sind 1, 0, –1, –8, also ist tatsächlich C richtig, B, D, E aber falsch. Um 2 (also A) auszuschliessen, geht diese Methode nicht, aber dazu genügt es, ein einziges ungerades Glied zu finden, z.B. a_2.

3) Betrachte zunächst den Zähler und den Nenner gesondert:

Zähler: $\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ist abwechselnd 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, ...
Nenner: $n + 1$ ist aufsteigend 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

Der Quotient ist also an jeder zweiten Stelle 0, an den andern Stellen vom Betrag her abnehmend, aber ohne Betrag alternierend. Insgesamt gilt aber $\underline{\underline{\text{D}}}$, denn die Nicht-Null-Glieder werden vom Betrag her immer kleiner.
(A ist falsch wegen des Alternierens, B ist falsch weil immer wieder Null und Nicht-Null abwechseln, C ist falsch, weil es unendlich oft eine 0 hat (dann kann 1 nicht der Grenzwert sein, nur der Grenzwert kann unendlich oft vorkommen in einer Folge), E ist falsch, weil 0 tatsächlich ein Grenzwert ist.

info@examprep.ch Tel: +41 720 06 67
Verwaltung: ExamPrep GmbH Parkweg 5, 8800 Thalwil

4) Da in der expliziten Darstellung drei Koeffizienten gefragt sind, braucht man drei (möglichst einfache) Glieder der Folge, die man aus der Rekursion erhält:

$$a_1 = 1 \qquad \Rightarrow\ 1 = p + q + r \ (I)$$
$$a_2 = \left(a_{1+1} = a_1 + \mathbf{1} + 1 = 1 + 1 + 1 =\right) 3, \qquad \Rightarrow\ 3 = 4p + 2q + r \ (II)$$
$$a_3 = \left(a_{2+1} = a_2 + \mathbf{2} + 1 = 3 + 2 + 1 =\right) 6 \qquad \Rightarrow\ 6 = 9p + 3q + r \ (III)$$

$II - I$: $2 = 3p + q\ (IV)$, $III - I$: $5 = 8p + 2q\ (V)$, $V - 2IV$: $1 = 2p \ \Rightarrow\ \underline{\underline{p = \frac{1}{2}}}$
in IV eingesetzt: $\Rightarrow\ \underline{\underline{q = \frac{1}{2}}}$. In I eingesetzt: $\Rightarrow\ \underline{\underline{r = 0}}$.

(Man könnte die Gültigkeit der expliziten Darstellung mit *vollständiger Induktion* nachprüfen, aber das war nicht verlangt. Für ein Beispiel dazu siehe Aufgabe 5.)

5) a) $a_1 = \frac{1+1}{2^1} = 1$, $a_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{3+1}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{4+1}{2^4} = \frac{5}{16}$.

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \underline{\underline{1}}, \quad s_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = 1 + \tfrac{3}{4} = \underline{\underline{\tfrac{7}{4}}},$$
$$s_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\tfrac{9}{4}}},$$
$$s_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{16} = \underline{\underline{\tfrac{41}{16}}}$$

b) Da nur zwei Koeffizienten gesucht sind, genügt es, zwei Folgeglieder zu berechnen:

$$s_1 = p - \frac{1+q}{2} = 1 \qquad \Rightarrow\ 2p - 1 - q = 2 \ (I)$$
$$s_2 = p - \frac{2+q}{2^2} = \frac{7}{4} \qquad \Rightarrow\ 4p - 2 - q = 7 \ (II) \qquad II - I:\ 2p - 1 = 5 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{p = 3}}$$

in I eingesetzt: $\Rightarrow\ \underline{\underline{q = 3}}$

Es soll also bewiesen werden: $s_n = 3 - \frac{n+3}{2^n} \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Vollständige Induktion über *n*.

Induktionsverankerung: $n = 1$: $s_1 = 3 - \frac{1+3}{2^1} = 1$ stimmt.

Induktionsannahme: Die Behauptung sei wahr für n.

Induktionsschritt:
Es soll gezeigt werden, dass die Behauptung wahr ist für $n + 1$,
das heisst, dass folgende Gleichung gilt: $3 - \frac{(n+1)+3}{2^{(n+1)}} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$.

Die rechte Seite kann aber auseinandergenommen werden,
und die linke Seite vereinfacht: $3 - \frac{n+4}{2 \cdot 2^n} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Für die Summe kann die *Induktionsannahme* eingesetzt werden,
und für das Glied a_{n+1} die Definition der Folge a_n:

$$3 - \frac{n+4}{2 \cdot 2^n} = 3 - \frac{n+3}{2^n} + \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} \ \Rightarrow\ \frac{n+4}{2 \cdot 2^n} = \frac{n+3}{2^n} - \frac{n+2}{2 \cdot 2^n}$$

$\Rightarrow\ n+4 = 2(n+3) - (n+2)\ \Rightarrow\ n+4 = n+4$. Stimmt auch.

info@examprep.ch
Tel: +41 720 06 67

Verwaltung:
ExamPrep GmbH
Parkweg 5, 8800 Thalwil

6) Jede dritte Zahl ist durch 3 teilbar. Mit anderen Worten, sie bilden eine *arithmetische Folge* mit $d = 3$. die erste dreistellige Zahl zwischen 100 und 1000 ist 102, die letzte 999. Also gilt $a_1 = 102$, $a_n = 999 = a_1 + (n-1)d = 102 + 3(n-1)$
$\Rightarrow\ 897 = 3(n-1)\ \Rightarrow\ 299 = n-1\ \Rightarrow\ 300 = n$.

(Alternativ kann man auch sagen: von 102 bis 999 sind es 898 Zahlen, geht erst durch 3, wenn ich Zwei dazuzähle (da ich mit einer durch Drei teilbaren Zahl aufgehört habe, muss ich noch „die andern beiden Zahlen der Dreiergruppe“ mitzählen.)

Die Summenformel liefert: $s_{300} = \frac{1}{2}\cdot 300\cdot(102 + 999) = 150\cdot 1101 = \underline{\underline{165'150}}$

7) Ebenfalls eine *arithmetische Folge*, hier mit $d = 20$. Die erste dreiziffrige durch 20 teilbare Zahl ist 100, die letzte 980. Also gilt $n = (980-100):20 + 1 = 45$.
Die Summenformel liefert: $s_{45} = \frac{1}{2}\cdot 45\cdot(100 + 980) = 45\cdot 540 = \underline{\underline{24'300}}$

8) Eine *arithmetische Folge* mit $d = 21$. Es sind $n = (10702-13) : 21 + 1 = 510$.
Die Summe beträgt: $s = \frac{1}{2}\cdot 510\cdot(13 + 10'702) = \underline{\underline{2'732'325}}$

9) Ungerade Zahlen bilden eine *arithmetische Folge* mit $d = 2$. Ihre Anzahl m ist hier:
$m = ((2n-1)-3) : 2 + 1 = n-1$. Somit beträgt die Summe:
$s = \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(3 + (2n-1)) = (n-1)(n+1) = \underline{\underline{n^2 - 1}}$ (B)

10) Die Folge besteht also aus 2 plus 9 eingeschobene gleich 11 Glieder. Das *mittlere* Glied ist das *geometrische Mittel* der beiden äussersten Glieder, also $\sqrt{9\cdot 576} = 3\cdot 24 = 72$. (Diese „erweiterte“ Beziehung von Glieder einer geometrischen Folge zu ihren „entfernteren“ Nachbarn kann man wie folgt einsehen: ein beliebiges Glied a hat k Stellen vor und hinter sich die beiden Zahlen aq^{-k} bzw. aq^k. Ihr geometrisches Mittel beträgt: $\sqrt{aq^{-k}\cdot aq^k} = \sqrt{a^2} = a$.) Also: $11\cdot 72 = \underline{\underline{792}}$

Ohne diese Überlegung kann man sich auch sagen: $a_1 = 9$, $a_{11} = 576 = a_1\cdot q^{10}$, also $q = \sqrt[10]{576 : 9} = \sqrt[10]{64} = \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[5]{2^3}$. Das mittlere Glied ist $a_6 = a_1\cdot q^5 = 9\cdot 2^3$, also ebenfalls 72.

11) Für das zweite Glied einer *geometrischen Folge* gilt: $a_2 = a_1\cdot q$, also $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$.
Dann ist das vierte Glied $a_4 = a_1\cdot q^3 = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}^3}{\sqrt{2}^3} = \frac{4}{\sqrt{2}^2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$ (A)

12) Die Summe (der unendlich vielen Glieder!) dieser *geometrischen Reihe* ist
$s = \frac{a_1}{1-q} = 9$, und $a_2 = a_1\cdot q = a_1 - 4$. Also ist $a_1\cdot q - a_1 = -4\ \Rightarrow\ a_1(1-q) = 4$
$\Rightarrow\ 1 - q = \frac{4}{a_1}$. In s eingesetzt: $\frac{a_1^2}{4} = 9\ \Rightarrow\ a_1^2 = 36\ \Rightarrow\ a_1 = \underline{\underline{6}}$

(–6 ist keine Lösung, sonst wäre $q > 1$ und die Reihe *nicht* konvergent!)

info@examprep.ch Tel: +41 720 06 67
Verwaltung: ExamPrep GmbH Parkweg 5, 8800 Thalwil

13) Da es eine *geometrische Folge* ist, gilt:

$s_3 = a_1 \frac{q^3-1}{q-1} = 351$ und $s_6 = a_1 \frac{q^6-1}{q-1} = 351 + 13 = 364$.

Teilt man die zweite Gleichung durch die erste, erhält man:
$q^3+1 = \frac{364}{351} = \frac{28}{27} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.
(Beachte dazu die *dritte binomische Formel:* $q^6-1 = (q^3+1)(q^3-1)$.)
In die erste Gleichung eingesetzt: $a_1 \cdot \frac{\frac{1}{27}-1}{\frac{1}{3}-1} = a_1 \cdot \frac{26 \cdot 3}{27 \cdot 2} = a_1 \cdot \frac{13}{9} = 351 \Rightarrow a_1 = \underline{\underline{243}}$

Oder:

Die Summe der ersten drei Glieder direkt hinschreiben: $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 351$,
ebenso die Summe der nächsten drei Glieder: $a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 13$
$\Rightarrow q^3(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 351 q^3 = 13 \Rightarrow q^3 = \frac{13}{351} = \frac{1}{27}$ und weiter wie oben.

Dass diese beiden Ansätze dasselbe liefern, liegt an folgender schöner Identität, die ja auch für einen ***Beweis*** *der Formel für die Teilsumme einer geometrischen Reihe benutzt werden kann:* $\frac{q^n-1}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1$

14) Für die Summe einer konvergenten unendlichen Reihe gilt die Formel: $s = \frac{a_1}{1-q}$.
Beachte, dass die Reihe mit quadrierten Folgegliedern immer noch eine geometrische Reihe darstellt! Das Anfangsglied ist einfach quariert, und auch der Quotient aufeinanderfolgender Glieder, also das q, wurde quadriert. Es sind also folgende Gleichungen gegeben: $20 = \frac{a_1}{1-q}$ und $100 = \frac{a_1^2}{1-q^2}$.
Wieder ist es am einfachsten, die zweite Gleichung unter Ausnützung des dritten Binoms durch die erste Gleichung zu dividieren (aber man kann auch nach a_1 oder q auflösen und in die andere Gleichung einsetzen): $5 = \frac{a_1}{1+q} \Rightarrow 5 + 5q = a_1$
Auch die erste Gleichung nach a_1 aufgelöst und dieses eingesetzt ergibt:
$5 + 5q = 20 - 20q \Rightarrow 25q = 15 \Rightarrow q = \frac{3}{5} \Rightarrow a_1 = 5 + 5q = \underline{\underline{8}}$

15) Konvergente unendliche Reihen sind z.B. geometrische Reihen mit $|q| < 1$.
Tatsächlich ist bei der vorliegenden Reihe der *Quotient* aufeinanderfolgender Glieder konstant, und zwar x^3 . Also muss gelten $|x^3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^3 < 1$ ($\underline{\underline{C}}$)
(Dass alle andern Bereiche nicht *nur* dann gelten, sieht man durch Einsetzen einer Zahl aus dem fehlenden (bzw. bei A überflüssigen) Intervall.)

16) Da es eine *geometrischen Folge* ist, gilt $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{200}{500} = 0.4$. Weiter gilt $a_n = a_1 q^{n-1}$.
Also folgt aus der Ungleichung: $a_n < 10^{-4} \Rightarrow a_1 q^{n-1} < 10^{-4} \Rightarrow \frac{a_1 q^n}{q} < \frac{1}{10^4}$.
Da $q > 0$ ändert sich die *Richtung* des Ungleichheitszeichen nicht, wenn man übers Kreuz multipliziert, und man erhält: $10^4 a_1 q^n < q$. Einsetzen von a_1 und q (nur rechts): $5 \cdot 10^6 q^n < 0.4$. Schöner, wenn mit 10 multipliziert: $5 \cdot 10^7 q^n < 4$.
Nach q^n aufgelöst: $q^n < \frac{4}{5 \cdot 10^7}$. Logarithmiert: $n \log(q) < \log\left(\frac{4}{5 \cdot 10^7}\right)$.
Vorsicht! Teilen durch $\log(q)$ *ändert* die Richtung dies Ungleichheitszeichens, da $\log(x) < 0$ für $0 < x < 1$. Also: $n > \frac{\log\left(\frac{4}{5 \cdot 10^7}\right)}{\log(0.4)} \approx 17.83 \Rightarrow n_0 = \underline{\underline{17}}$ (da $n > n_0$.)

info@examprep.ch
Tel: +41 720 06 67
Verwaltung:
ExamPrep GmbH
Parkweg 5, 8800 Thalwil

17) Die vier Glieder der geometrischen Folge heissen: $a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2,\ a_1 q^3$.
Das dritte Glied soll gleich dem arithmetischen Mittel aus dem ersten, zweiten und vierten Glied sein, heisst: $3 a_1 q^2 = a_1 + a_1 q + a_1 q^3$. Auf beiden Seiten durch a_1 teilen: $3q^2 = 1 + q + q^3 \ \Rightarrow\ q^3 - 3q^2 + q + 1 = 0$. 1 ist eine offensichtliche Lösung, also Polynomdivision durch $(q-1)$: $\Rightarrow\ (q-1)(q^2 - 2q - 1) = 0$.
Die andern beiden Lösungen ergeben sich aus der Lösungsformel für $q^2 - 2q - 1 = 0$: $\underline{\underline{q_1 = 1,\ q_2 = 1 + \sqrt{2},\ q_3 = 1 - \sqrt{2}}}$

18) Als erstes werden die vier Glieder umbenannt in *a, b, c* und *d.*
Aus der arithmetischen Folge ergibt sich: $c = a + b$ (I), $d = a + 2b$ (II).
Aus der geometrischen Folge ergibt sich: $b = a \cdot c$ (III), $d = a \cdot c^2$ (IV).

Prinzipielles Vorgehen bei einem *Gleichungssystem (mit vier Unbekannten und vier Gleichungen):* Eliminiere dreimal aus *je zwei Gleichungen dieselbe* Unbekannte (so, dass insgesamt *alle vier Gleichungen* verwendet wurden, aber nie die beiden gleichen), das führt auf *drei* Gleichungen mit drei Unbekannten. Dasselbe für das drei mal drei System, und nochmal für das zwei mal zwei System.

Hier erkennt man, dass in den Gleichungen (I) und (III) bereits *kein* d vorhanden ist, also kombiniert man nur (II) und (IV) so, dass ebenfalls d verschwindet.
Es genügt *gleichzusetzen* : (II) = (IV) : $a + 2b = a \cdot c^2$ (V).

Nun fährt man mit (I), (III) und (V) fort : (I) nach a auflösen und in die andern einsetzen : $a = c - b$ in (III): $\Rightarrow\ b = (c - b) \cdot c \ \Rightarrow\ b = c^2 - bc$ (VI)
in (V): $\Rightarrow\ c - b + 2b = (c - b) \cdot c^2 \ \Rightarrow\ b + c = c^3 - bc^2$ (VII)

(VI) nach b auflösen: $b = c^2 - bc \ \Rightarrow\ b + bc = c^2 \ \Rightarrow\ b(1 + c) = c^2 \ \Rightarrow^*\ b = \frac{c^2}{(1+c)}$
und in (VII) einsetzen: $b + c = c^3 - bc^2 \ \Rightarrow\ \frac{c^2}{(1+c)} + c = c^3 - \frac{c^2}{(1+c)} c^2$

(* natürlich darf hier c nicht -1 sein. Aber $c = -1$ führt in (III) zu $b = -a$, das führt in (I) zu $c = 0$, Widerspruch. Es gilt also $c \neq -1$.)

$$\Rightarrow\ \frac{2c^2 + c}{(1+c)} = \frac{c^3}{(1+c)} \ \Rightarrow\ 2c^2 + c = c^3 \ \Rightarrow\ c^3 - 2c^2 - c = 0 \ \Rightarrow\ c(c^2 - 2c - 1) = 0$$

$c = 0$ ist *keine* Lösung, denn ein einer geometrischen Reihe müssen die *Quotienten* aufeinanderfolgender Glieder gleich sein, und man kann nicht durch Null teilen. Daher bleiben die Lösungen von $c^2 - 2c - 1 = 0$:

$c_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Da in der Aufgabenstellung steht, dass *alle vier Zahlen* *positiv* sein sollen, ist nur die Lösung mit Plus richtig.

Einsetzen liefert (wieder Umbenannt):

$\underline{x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ x_3 = 1 + \sqrt{2},\ x_4 = 2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}}$

info@examprep.ch Tel: +41 720 06 67
Verwaltung: ExamPrep GmbH Parkweg 5, 8800 Thalwil

19) a) eine unendliche geometrische Reihe konvergiert, falls der konstante Quotient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ einen Betrag streng kleiner als Eins hat: $|q| < 1$. Hier muss also gelten: $\left|\frac{\cos 2x}{\cos x}\right| < 1$. Es hilft das Additionstheorem (vgl. falls nötig Formelsammlung) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$. Eingesetzt: $\left|\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\right| < 1 \;\Rightarrow\; \left|2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right| < 1$.

Wegen des Betrags eine *Fallunterscheidung* durchführen, oder weil es in diesem Fall nicht zu kompliziert wird, einfach quadrieren (das Ungleichheitszeichen bleibt, weil auf beiden Seiten *positive* Zahlen stehen, und das Quadrieren in diesem Fall die Grösser-Relation beibehält)

$\Rightarrow\; 4\cos^2 x - 4 + \frac{1}{\cos^2 x} < 1 \;\Rightarrow\; 4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 < 0$. Substituiere $z = \cos^2 x$:

$\Rightarrow\; 4z^2 - 5z + 1 < 0 \;\Rightarrow\; (4z-1)(z-1) < 0$. Nullstellen sind also bei $z_1 = 1 = \cos^2 x \;\Rightarrow\; \cos x = \pm 1$ bzw. $z_2 = \frac{1}{4} = \cos^2 x \;\Rightarrow\; \cos x = \pm\frac{1}{2}$, im angegebenen Intervall also bei 0° und 180°, und bei 60° und 120°, so dass die Ungleichung dort nicht erfüllt ist. Durch einsetzen von Werten zwischen diesen Grenzen (oder aus dem Kurvenverlauf des Kosinus) erkennt man, *welche* Intervalle zwischen diesen Nullstellen *negative* Funktionswerte liefern, so dass die Ungleichung erfüllt ist: Für $\underline{\underline{0° < x < 60° \text{ und } 120° < x < 180°}}$.

(Beachte auch, dass für 90° q gar nicht definiert ist).

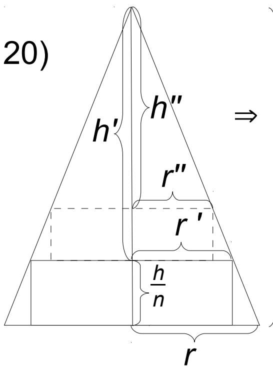
b) Weiter gilt für die unendliche geometrische Reihe, dass ihre Summe $s = \frac{a_1}{1-q}$ beträgt. Hier soll also gelten: $a_1 = s\,(1-q) \;\Rightarrow\; \cos x = 2\cos x - \frac{1}{\cos x} - 1$.

(Es wurde bereits das umgeformte q aus a) eingesetzt.)

$\Rightarrow\; \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 - \cos x \;\Rightarrow\; 0 = \cos^2 x - \cos x - 1$. Lösungsformel für die quadratische Gleichung liefert: $(\cos x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\cos(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}}$.

(Das *Anfangsglied* ist gesucht, und nicht etwa der Wert für x ! Die andere Lösung ist grösser als Eins und kann daher nicht ein Wert der Kosinusfunktion sein. Erfreulicherweise liegt das dazugehörige x = 128.17° in den unter a) gefundenen Intervallen, so dass die Reihe dann überhaupt erst konvergiert!)

20)



$\frac{r'}{h'} = \frac{r}{h}$ (Strahlensatz) $\Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$, und $h = h' + \frac{h}{n}$

$\Rightarrow\; h' = h\left(\frac{n-1}{n}\right) \;\Rightarrow\; \frac{h'}{h} = \frac{n-1}{n} \;\Rightarrow\; \frac{r'}{r} = \frac{n-1}{n} \;\Rightarrow\; r' = r\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Nun ersetze überall h durch h', h' durch h'', r durch r' und r' durch r''. Dann ergibt sich ebenso: $\Rightarrow\; r'' = r'\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Berechne die Volumina der ersten beiden Zylinder:

$V_1 = (r')^2\pi\frac{h}{n}$, $V_2 = (r'')^2\pi\frac{h'}{n}$.

Die Zylinder sind proportional zueinander, also bilden ihre Volumina eine *geometrische Reihe*. Berechne das q dieser Reihe: $q = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(r'')^2}{(r')^2}\frac{h'}{h} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3$.

Für die *Summe* s gilt: $s = \frac{V_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 r^2\pi\frac{h}{n}}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3} = \frac{\frac{(n-1)^2}{n^2} r^2\pi\frac{h}{n}}{\frac{n^3-(n-1)^3}{n^3}} = \frac{(n-1)^2 r^2\pi h}{n^3-(n-1)^3}$

Mit $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ folgt: $\underline{\underline{s = \frac{n^2-2n+1}{3n^2-3n+1}\,r^2\pi h}}$.

Und für $n \to \infty$ ergibt sich $\underline{\underline{s = \frac{1}{3}r^2\pi h}}$ (das Volumen des ganzen Kegels).

info@examprep.ch
Tel: +41 720 06 67