2.5 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) bilden eine *Erweiterung* der reellen Zahlen, genau wie schon die reellen Zahlen die rationalen, diese die ganzen und diese die natürlichen Zahlen erweitert haben: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
(Vergleiche dazu den ersten Abschnitt von Kapitel 2, Zahlenmengen.)

Für das Folgende ist wichtig im Hinterkopf zu behalten, dass man mit den komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen möchte, und dass diese Erweiterung Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ enthalten soll.

Das bedeutet, dass für so eine Lösung $x^2 = -1$ ist, also kann es *keine reelle Zahl* sein, denn diese sind im Quadrat *nie negativ*.

Mit *Erweiterung* sind insbesondere zwei Dinge gemeint: Jede Zahl des ursprünglichen Zahlenraums ist ebenfalls eine Zahl des erweiterten Zahlenraums: Die erste Menge ist in die zweite Menge *„eingebettet“* (eine Teilmenge davon). Zweitens: Alle Rechenregeln des erweiterten Zahlenraumes müssen den bisher geltenden Regeln des ursprünglichen Zahlenraumes genügen, denn man könnte ja Zahlen aus dem ursprünglichen Raum erwischen, aber auch umgekehrt. Diese drei Forderungen werden als *Permanenzprinzip* (lat. „permanere“ = „bleiben“, hier im Sinn von „gültig bleiben“) bezeichnet und regeln, was man als *sinnvolle* Zahlenbereichserweiterung ansieht:

Das Permanenzprinzip für Zahlenbereichserweiterungen

1. „Die alten Zahlen sind **ein Teil** der neuen Zahlen“
2. „Für die neuen Zahlen müssen alle **Rechenoperationen definiert** werden, die schon mit den alten Zahlen möglich waren.“
3. „Die Rechenoperationen für die neuen Zahlen müssen **die gleichen Regeln** erfüllen wie die entsprechenden Operationen für die alten Zahlen.“

Bemerkungen:

- Zu 1: Die zu erweiternde Zahlenmenge soll eine (echte) Teilmenge der erweiterten Zahlenmenge sein. Jede „alte“ Zahl soll auch als (Spezialfall einer) „neuen Zahl“ angesehen werden. So kann man die natürliche Zahl 2 als auch ganze Zahl „+2“ und als rationale Zahl $\frac{2}{1}$, reelle Zahl 2.0 und komplexe Zahl $2 + 0 \cdot i$ auffassen.
- Zu 2: Dies ist der schwierige Teil, weil dabei Regel 3 beachtet werden muss. Regel 2 sagt, dass man z.B. Brüche addieren können muss, denn man kann ja ganze Zahlen bereits addieren. Die Addition von Brüchen (gleichnamig machen!) ist aber relativ kompliziert definiert. Wieso addiert man nicht einfach Zähler und Nenner jeweils miteinander? Weil man dann eine Addition hätte, die *nicht dasselbe Ergebnis* liefert, wenn beide Brüche „zufällig ganze Zahlen sind“:

  $2 + 3 = 5$, aber $\frac{2}{1} (+) \frac{3}{1} = \frac{5}{2} \neq 5$
- Zu 3: Nicht nur die Ergebnisse müssen gleich sein, wenn man die „neue Art der Operation“ auf die alten Zahlen anwendet, sondern auch die *Regeln* für diese Operationen (ob sie assoziativ oder kommutativ sind, welche Distributivgesetze gelten etc.) müssen genau gleich lauten wie die andern (sonst würden sich „andere Ergebnisse“ übrigens nicht verhindern lassen.

Man denke bei allen folgenden Definitionen an das Permanenzprinzip und überlege sich jeweils selbst den Spezialfall, dass alle vorkommenden Zahlen auch *reell* sein könnten!

Die Erweiterung der reellen zu den komplexen Zahlen war nicht naheliegend und benötigte rund dreihundert Jahre (von ersten Versuchen im sechzehnten Jahrhundert bis zur vollständigen Theorie im achtzehnten Jahrhundert).
In der heutigen modernen Sichtweise ist nichts mehr von diesem langen Ringen um den Begriff der komplexen Zahlen zu spüren. Dennoch ist es wichtig, zu wissen, dass diese Ideen nicht „vom Himmel gefallen“ sind, und z.B. die algebraische Notation $a + b \cdot i$ für komplexe Zahlen (siehe unten) historisch bedingt ist.

Dass die komplexen Zahlen lange „unheimlich“ waren, und zwar auch für die grössten Mathematiker ihrer Zeit, belegen folgende *Bezeichnungen* für komplexe Zahlen:

Gottfried Wilhelm Leibniz [1646 – 1716]:	„ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein“
Leonhard Euler [1707 – 1783]:	„unmögliche Zahlen“
Carl-Friedrich Gauss [1777 – 1855]:	„Schatten von Schatten“

Zwei berühmte Zitate über Zahlen

Von **Leopold Kronecker** (deutscher Mathematiker, [1823 – 1891]) wird oft zitiert:

*„Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott geschaffen,
alles andere in der Mathematik ist nur Menschenwerk.“*

Und von **Richard Dedekind** (ebenfalls deutscher Mathematiker, [1831 – 1916]) aus seinem Aufsatz mit dem treffenden Titel *„Was sind und was sollen die Zahlen?“* stammt:

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“

2.5.1 Definition

Als Definition der komplexen Zahlen sind heute zwei gleichwertige Ansätze verbreitet, der eine häufiger auf der Schulstufe, der andere häufiger auf der akademischen Stufe (obwohl beides auch in der jeweils anderen Stufe angetroffen werden kann...):

A) Definiere eine „imaginäre Einheit" i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Beim Rechnen mit beliebigen Termen mit „ i " sieht man, dass sie sich stets in die Form $a + b \cdot i$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ bringen lassen. Dann nennt man die Menge aller solcher Zahlen die komplexen Zahlen und rechnet nach, dass sie tatsächlich eine Erweiterung der re ellen Zahlen mit Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ bilden.

Vorteil: Leicht zu erklären. *Nachteil:* Unheimlich. „Wie kommt man auf diese Idee?"

B) Definiere die Menge aller geordneten Paare (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ und darauf eine (sehr!) spezielle Multiplikation, welche die gewünschte Eigenschaften hat, und rechne ebenfalls nach, dass es eine Erweiterung ist.

Vorteil: Passt super in die „Theorie der Zahlen". *Nachteil:* Sehr theoretisch.

Natürlich lässt sich jede Sichtweise in die andere umformen, es gilt: $a + b \cdot i = (a, b)$. Bei B) ist ein weiterer Vorteil, dass diese „geordneten Paare reeller Zahlen" bereits als *Punkte der Ebene* bekannt sind und die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen ganz natürlich erscheint, während sie bei A) wieder etwas „unheimlich" als Zaubertrick daherkommt. Trotzdem folgt nun der Weg A), da er eher aus der Schule bekannt sein dürfte und eben, weniger abstrakt ist.

Imaginäre Einheit, imaginäre Zahlen

Das Symbol $\boldsymbol{i}$ wird durch die Eigenschaft $i^2 = -1$ und die Konvention, dass i wie eine reelle Variable allen algebraischen Rechenregeln gehorchen soll, (z.B. $i + i = 2i$) vollständig definiert.

Man bezeichnet	$\boldsymbol{i}$	als ***imaginäre Einheit***,
und alle Vielfachen	$r\,i\,,\;\; r \in \mathbb{R}$	als ***imaginäre Zahlen***.

Bemerkungen:

- Es wird also *nicht* gesagt, *was* dieses „ i " sein soll, nur, *wie man damit rechnet*. Bei einer Definition gibt es nichts zu „verstehen", man kann sie nur zur Kenntnis nehmen und allenfalls erfahren, *warum* man diese Definition macht, historisch bedingt und mit dem Nutzen für das Rechnen.
- Die Bezeichnung „imaginär" (lat. „imaginarius" = „eingebildet") geht auf René Descartes [1596 – 1650] zurück. Er wollte ausdrücken, dass diese Grösse „nur in unserer Vorstellung" existiert. Es gibt ja z.B. keine *reelle Zahl*, deren Quadrat negativ ist. Also ist dieses i etwas, das ausserhalb des Zahlenstrahls (!) liegt.
- Für alle philosophisch bzw. linguistisch Interessierten: dies ist eine *„intensionale"* Definition. Es wird nicht gesagt, worauf der Begriff *referenziert* (oder ob es eine solche Grösse überhaupt geben kann), sondern welche *Eigenschaft* ihn ausmacht.
- Aber bereits bei einer „natürlichen" Zahl wie „3" stellt sich ja die Frage, inwiefern diese Zahl „existiert", ob es etwa eine „reine Idee" (Platon) oder ein abstrakter Begriff, gewonnen aus unserer Anschauung ist... Siehe auch die Zitate von Kronecker und Dedekind auf der ersten Seite.

Über den Unsinn der Schreibweise $i = \sqrt{-1}$

Leider ist in nicht wenigen Büchern die Formulierung $i = \sqrt{-1}$ zu finden. Dies ist aber *Unsinn* (mit viel Freude habe ich diese Einschätzung auch in einem Dokument, welches von der ETH Zürich für den Unterricht in Gymnasien herausgegeben wird, gelesen. Es ist also nicht nur meine persönliche Meinung.)

Wem das Problem klar ist, kann diese ganze Seite einfach überspringen. Alle andern bitte zur Kenntnis nehmen:

Die Wurzel für *reelle* Zahlen ist so *definiert*, dass der Radikand „nicht negativ" sein darf. (Nicht negativ ist eine Kurzform für positiv *oder* Null, denn aus Null kann man die Wurzel problemlos ziehen.)

Jetzt könnte man ja denken, dass mithilfe der komplexen Zahlen sich *neu* auch aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen lässt, schliesslich handelt es sich ja um eine Zahlenbereichs*erweiterung*, die bisher nicht lösbare Aufgaben lösbar machen soll.

Tatsächlich hat die Gleichung $x^2 = -1$ im Reellen *keine* Lösung, im Komplexen aber schon (sogar zwei): *i* und *–i*. Und hier liegt schon das erste Problem: Soll „ $\sqrt{-1}$ " die eine oder andere Zahl bedeuten? Wer jetzt sagt, im Reellen ist die Wurzel, z.B. $\sqrt{c},\ c \in \mathbb{R}_0^+$, ja als *positive* Lösung der Gleichung $x^2 = c$ definiert, hat ein ganz seltsames Problem: *positiv* heissen im Reellen Zahlen a, für die gilt $a > 0$. Wie weiter unten noch gezeigt werden wird, gilt jedoch *weder* $i > 0$ *noch* $-i > 0$. Es gibt keine „positiven oder negativen komplexen Zahlen", sie lassen sich nämlich „nicht anordnen" (siehe, wie gesagt, weiter unten.)

Es ist aber noch viel unangenehmer: *Könnte* man $\sqrt{-1}$ z.B. als *i* (also die Version ohne Minus) definieren, so würde das Gesetz $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, das für nichtnegative reellen Zahlen a und b gilt, nicht mehr gelten. Denn würde es gelten, so hätte man: $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$, also $-1 = 1$, ein Widerspruch. Welche Regeln, die wir gerne und oft und ohne gross darüber nachzudenken, beim algebraischen Umformen anwenden, würden denn noch alles nicht gelten? Das *Permanenzprinzip* verbietet es uns daher, $i = \sqrt{-1}$ zu setzen.

Es ist doch auch kein Problem, dass wir aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen können. Wieso sollten wir das denn tun wollen? Wenn ich wissen will, welche Lösungen z.B. die Gleichung $x^2 = -9$ hat, so kann ich eben *nicht* wie im nichtnegativen Fall $\pm\sqrt{\ }$ auf beiden Seiten schreiben (und man beachte, dass man an das Plusminus selber denken muss, die Wurzel *selber* ist nicht „positiv *und* negativ"), sondern muss einfach *anders* vorgehen: $x^2 = -9 = i^2 \cdot 3^2 = (3i)^2 \ \Rightarrow\ x = \pm 3i$, wobei im letzten Schritt *nicht* etwa doch die Wurzel gezogen, sondern das Gesetz $A^2 = B^2 \ \Rightarrow\ A = B \ \vee\ A = -B$ angewendet wurde.

Es wird sich übrigens ergeben, das durch die kleine Definition einer Zahl i als Lösung *einer* bestimmten Gleichung, $x^2 + 1 = 0$, *alle* Gleichungen (sogar Polynome beliebig hohen Grades) Lösungen besitzen, und zwar genausoviele, wie der Grad des Polynoms angibt (sogenannter „Fundamentalsatz der Algebra"). Man kann sagen, ein kleiner Schritt (der aber lange nicht akzeptiert wurde) hat eine grosse Wirkung.

Dieses Problem, dass man vorsichtig sein muss und nicht einfach etwas wie „ $i = \sqrt{-1}$ " hinschreiben darf, hat wohl auch bewirkt, dass die oben erwähnten drei Jahrhunderte benötigt wurden, um „ganz sicher zu sein" dass nicht doch noch Widersprüche zu bisherigen Rechenregeln entstehen, die einfach nicht so offensichtlich sind.

Wenn man aus negativen Zahlen also trotz der Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen nicht die Wurzel ziehen kann, dann kann man auch aus komplexen Zahlen nicht immer die Wurzel ziehen. Oder? Das ist richtig, aber trotzdem wird von den „Wurzeln komplexer Zahlen" gesprochen. Damit ist aber nicht eine *Operation* wie das Wurzelziehen als Grundrechenart gemeint, sonder das Lösen einer Gleichung („Wurzel" ist auch ein altes Wort für „Lösung einer Gleichung"!) Man kann also die Lösungen der Gleichung $x^2 = c$ (und sogar für beliebige Exponenten $x^n = c$) bestimmen, *egal* ob c eine positive oder negative reelle Zahl ist, und auch, wenn c eine *komplexe* Zahl sein sollte. Da diese Gleichung aber mehrere Lösungen hat (und zwar wie schon erwähnt stets n Stück), kann man keine *Operation* „Wurzelziehen" definieren, die ja stets ein eindeutiges Resultat liefern muss (zwei Zahlen haben z.B. nur *eine* Summe und nicht zwei mit unterschiedlichem Vorzeichen). Man nennt einfach die Lösungen der Gleichung $x^n = c$ „die Wurzeln" von *c*. Da man aber *niemals schreibt* $x = \sqrt[n]{c}$, wenn man komplexe Lösungen zulässt (im Reellen hat so eine Gleichung tatsächlich stets *höchstens eine* Lösung, nach Definition des Wurzelsymbols!) sollte es auch keine Missverständnisse geben.

Die Division durch Null lässt sich nicht mit einer Zahlenbereichserweiterung ermöglichen

Inspiriert von i als „einfach neu definierte Lösung des Problems, dass keine reelle Zahl im Quadrat –1 geben kann" könnte man auch ein j zu definieren versuchen, welches die (im Reellen) unlösbare Gleichung $0 \cdot j = 1$ löst. Leider ist hier das Permanenzprinzip auch unerbittlich: $1 = 0 \cdot j = (0+0) \cdot j = 0 \cdot j + 0 \cdot j$ $= 1 + 1 = 2$. Also *wenn* $0 \cdot j = 1$ wäre, so würde das *Distributivgesetz* zum Widerspruch $1 = 2$ führen. Aber wir *brauchen* das Distributivgesetz! Somit bleibt die Division durch Null „verboten".

Komplexe Zahl, Real- und Imaginärteil, Menge der komplexen Zahlen

Ein Term der Form $a + b \cdot i \quad (a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ heisst ***komplexe Zahl***,
a heisst ***Realteil***, und b (nicht $b\,i$!) heisst ***Imaginärteil*** der komplexen Zahl.

Die Menge $\mathbb{C} = \{\, a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$ heisst ***Menge der komplexen Zahlen***.

Bemerkungen:

- Eine komplexe Zahl ist also eine Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl. Aber sowohl Real-, *als auch* Imaginärteil einer komplexen Zahl sind *reelle Zahlen*. Unterscheide den *<u>reellen</u> Imaginärteil* ***b*** von der *<u>imaginären</u> Zahl* ***bi****.*
- Dieses „zusammengesetzt“ sein aus Real- und Imaginärteil führte auch zur Bezeichnung „komplexe“ Zahl. (lat. „complexus“ = „verflochten“).

Die Komplexen Zahlen sollen ja eine Erweiterung der reellen Zahlen sein. Dazu müssen sie diese zunächst als Teilmenge enthalten. Dies ist die Aussage des nächsten Satzes. Ebenso bilden auch die imaginären Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

Reelle und Imaginäre Zahlen sind komplexe Zahlen

Die reellen sowie die imaginären Zahlen sind jeweils eine **Teilmenge** der komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $\{r \cdot i \mid r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

Beweis: Um zu beweisen, dass eine Menge Teilmenge einer andern Menge ist, muss gezeigt werden, dass *jedes* Element der einen Menge auch Element der andern Menge ist.

Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als: $\mathbb{C} = \{\, a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$

Jede reelle Zahl a kann geschrieben werden als $a + 0 \cdot i$,
ist also eine komplexe Zahl mit *Imaginärteil* $b = 0$.

Und jede imaginäre Zahl bi kann geschrieben werden als $0 + b \cdot i$,
ist also **eine komplexe Zahl mit** *Realteil* $a = 0$. ■

Bemerkung:

- Damit ist noch nicht gezeigt, dass die *Rechenregeln* für komplexe Zahlen den Regeln für die reellen Zahlen genügen. Dies folgt aber weiter unten.

Spezialfälle der komplexen Zahlen mit Realteil oder Imaginärteil der Null ist

Eine komplexe Zahl mit Realteil Null $(0 + b \cdot i)$ ist eine imaginäre Zahl $(b \cdot i)$.

Eine komplexe Zahl mit Imaginärteil Null $(a + 0 \cdot i)$ ist eine reelle Zahl (a) .

Weil also quasi „der Realteil fehlt“, liest man oft **rein imaginäre Zahl** statt imaginäre Zahl. Jedoch liest man nie „rein reelle Zahl“, denn das ist keine besonders interessante Zusatzinformation. Imaginäre Zahlen jedoch kommen *nur* als Teilmenge der komplexen Zahlen vor.

Gelegentlich möchte man eine komplexe Zahl auf ihren Real- oder Imaginärteil „reduzieren“, beziehungsweise diesen Teil „extrahieren“. Dazu dienen folgende beiden Funktionen:

Die Funktionen Re(z) und Im(z)

Für eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ sind die beiden Funktionen Re(z) und Im(z) definiert durch: **Re(*z*)** = *a*, **Im(*z*)** = *b* (liefern den Real- bzw. Imaginärteil von z)

Der Real- und Imaginärteil spielt auch eine Rolle dafür, ob zwei komplexe Zahlen *gleich* sind (bzw. *wann* sie als gleich angesehen werden):

Gleichheit von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen heissen genau dann **gleich**, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$

Bemerkungen:

- D.h. es gilt: $a_1 + b_1 \cdot i = a_2 + b_2 \cdot i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$, eine komplexe Zahl ist durch ihren Real- und Imaginärteil *eindeutig bestimmt*. Es gibt nur *eine* komplexe Zahl für jedes solche *Paar* von reellen Zahlen. Dies wird im nächsten Abschnitt ausgenutzt, um die Zahlen mit den Punkten der Ebene zu identifizieren.
- Beachte, dass auf der rechten Seite das Gleichheitszeichen zwischen je zwei *reellen* Zahlen steht, und bei denen wissen wir schon, wann sie gleich sein sollen.
- Soll das etwa heissen, dass $2 + 3 \cdot i = 2 + 3 \cdot i$ eine *eigene Definition* braucht? Wenn auf beiden Seiten *dasselbe* steht, dann *ist* es doch dasselbe, oder? Natürlich, aber der wichtige Punkt der Definition (wer hat ihn bemerkt?) ist das „genau dann“, oder anders gesagt, dass sie *nur* dann gleich sind, wenn auf beiden Seiten dasselbe steht. Dass dies *nicht unbedingt* so sein muss, kennen wir ja von den Brüchen! Es erstaunt uns ja nicht, dass $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ gilt. Bei den Brüchen kann man also *nicht* sagen, sie sind „genau dann gleich, wenn die Zähler und Nenner je gleich sind“, sondern nur, dass sie dann *sicher* gleich sind, aber nicht *nur* dann. Man kann komplexe Zahlen also nicht „kürzen und erweitern“, wie gesagt ist der Real- und Imaginärteil für jede komplexe Zahl *eindeutig*.
- Schliesslich kann man sich auch darüber wundern, dass diese Tatsache als *Definition* angegeben wird und nicht etwa als *Satz* bewiesen wird. Bei den Brüchen konnte man ja auch *beweisen*, dass Kürzen und Erweitern *denselben* Bruch ergeben.

2.5.2 Gausssche Zahlenebene

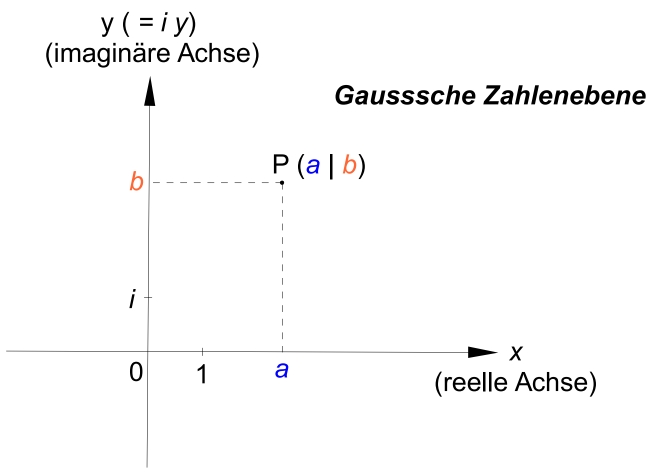
Da eine komplexe Zahl durch zwei reelle Zahlen – ihren Real- und ihren Imaginärteil – eindeutig bestimmt ist, lässt sich jeder komplexen Zahl eindeutig ein Punkt der Ebene zuordnen und umgekehrt, wenn ein zweidimensionales Koordinatensystem eingeführt wird.

Diese Ebene wird nach Carl Friedrich Gauss [1777 – 1855] benannt:

Gausssche Zahlenebene

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{ a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ kann als Menge von Punkten (a | b) in einer Ebene interpretiert werden. Der Realteil entspricht dabei der x–Koordinate, der Imaginärteil entspricht der y – Koordinate. Die Ebene der komplexen Zahlen wird ***gausssche Zahlenebene*** genannt.

Die x–Achse heisst entsprechend ***reelle Achse***, die y–Achse ***imaginäre Achse***.



Beobachtungen:

- Da die reellen Zahlen Imaginärteil 0 haben, entsprechen sie den Punkten mit y – Koordinate 0, also genau den Punkten auf der x – Achse. Diese ist also der „reelle Zahlenstrahl“, die imaginären oder gar komplexen Zahlen haben keinen Platz.
- Die imaginären Zahlen mit Realteil 0 liegen auf der y – Achse. Insbesondere die Zahl i (= 0 + 1 i), welche dem Punkt (0, 1), also genau der *Einheit* der y – Achse entspricht. Deshalb nennt man i auch die imaginäre Einheit.
- Dass reelle und imaginäre Zahlen Teilmengen der komplexen Zahlen sind, ist hier also auch noch geometrisch ersichtlich. Der *Ursprung* des Koordinatensystems, die Origo, entspricht dem Schnittpunkt der beiden Achsen, und ist somit die einzige zugleich reelle als auch imaginäre Zahl: 0.
- Statt dem *Punkt P* betrachtet man manchmal auch den *Ortsvektor (Pfeil)* $\overrightarrow{OP}$. Insbesondere für die *Operationen* mit komplexen Zahlen ist diese Vektorsichtweise nützlich zur geometrischen Interpretation (siehe unten für die Addition, und S. 2.59 für die Multiplikation.)

Komplexe Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene

Ein Punkt in der Gaussschen Zahlenebene entspricht derjenigen komplexen Zahl, deren Realteil seine x – und deren Imaginärteil seine y – Koordinate ist.

2.5.3 Betrag einer komplexen Zahl, fehlende Ordnung in $\mathbb{C}$

Bevor die üblichen *Rechenoperationen* mit komplexen Zahlen definiert werden, soll eine wichtige und seltsame Eigenschaft der komplexen Zahlen erwähnt werden: *Sie lassen sich nicht ordnen*. Damit ist gemeint, dass man für zwei komplexe Zahlen nicht sagen kann, welche „kleiner" ist und welche „grösser" (falls sie nicht gleich sind). Und weil man also auch nicht sagen kann, ob eine komplexe Zahl grösser oder kleiner als Null ist, gibt es auch nicht so etwas wie „positive" oder „negative" komplexe Zahlen!

Die komplexen Zahlen lassen sich nicht ordnen

Es ist nicht möglich, für die Menge der komplexen Zahlen eine sinnvolle Ordnungsrelation („für je zwei Zahlen ist die eine kleiner, grösser oder gleich wie die andere") zu definieren.

Bemerkungen:

- Die Ordnung der reellen Zahlen lässt sich auf dem Zahlenstrahl so erkennen: Von zwei Punkten ist stets klar, ob sie aufeinander liegen, und wenn nicht, welcher Punkt *links* vom andern liegt und somit *kleiner* ist. Die Menge der komplexen Zahlen bildet nun aber keine Gerade mehr, sondern lässt sich geometrisch nur als *Ebene* deuten. Welche gegenseitige Lage von zwei Punkten in einer Ebene sollte dann als „kleiner" bezeichnet werden?
- Die *Erweiterung* der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen ist also nur möglich, wenn man die Möglichkeit aufgibt, die Zahlen dieser neuen Menge *ordnen* zu können. Man gewinnt viel (bisher unlösbare Gleichungen werden lösbar, die Lösungen haben interessante Beziehungen untereinander (und ungeahnte Beziehungen in der ganzen Algebra und Analysis werden plötzlich erkennbar), geometrische Abbildungen lassen sich durch Funktionen beschreiben, sogar die Elektrotechnik profitiert von einfacheren Berechnungsmöglichkeiten durch komplexe Zahlen), aber verliert auch einiges (nämlich *alles*, was man nur mit Hilfe von „<" formulieren kann).

Beweis:

Mit einer „Ordnung" in einer Zahlenmenge ist gemeint, dass man zu zwei Zahlen a und b stets sagen kann, ob $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt. Dies ist bei den *reellen Zahlen* der Fall. Wenn es bei den komplexen Zahlen auch der Fall wäre, so müsste man entscheiden können, ob $i < 0$ oder $0 < i$ ist. (Denn *gleich* können sie ja *nicht* sein, denn i hat Imaginärteil 1, aber 0 hat Imaginärteil 0. Aha, wir brauchen also tatsächlich ein Kriterium um *genau* sagen können, ob zwei komplexe Zahlen *gleich* sind oder nicht. Also ist obige Definition von *Gleichheit* tatsächlich nötig!)

Wäre z.B. $i < 0$, so würde sich nach den Regeln für die Umformung von Ungleichungen das Ungleichheitszeichen *umdrehen*, wenn man auf beiden Seiten mit $i\,(<0)$ multipliziert! (Dann würde i wie eine „negative Zahl" wirken, da wir sie als kleiner als Null ansehen.) Es würde also gelten: $i^2 > 0$, also $-1 > 0$, was falsch ist.

Wäre aber umgekehrt $0 < i$, so würde sich das Ungleichheitszeichen eben gerade *nicht* umdrehen, wenn man auf beiden Seiten mit $i\,(>0)$ multipliziert, man erhält dann aber $0 < i^2$, also $0 < -1$, was wiederum falsch ist.

Man sieht: Die Erweiterung der reellen Zahlen mit Hilfe einer „imaginären Einheit" mit der *gewünschten Eigenschaft* $i^2 = -1$ führt unweigerlich dazu, dass man diese Einheit nicht mit der Null vergleichen kann, und somit keine Ordnung auf den komplexen Zahlen definieren kann. ■

Jedoch kann genau wie bei den reellen Zahlen ein *Betrag* einer komplexen Zahl definiert werden, der angibt, „wie weit die Zahl von Null entfernt“ ist:

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z

Für eine komplexe Zahl $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ heisst $|z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **(Absolut-) Betrag** der Zahl z.

Bemerkungen:

- Der Betrag wird für die *Polarform (trigonometrische Form)* komplexer Zahlen benötigt, siehe *S.* 2.57.
- Da der Betrag eine *reelle Zahl* ist, lässt er sich ordnen. Die auf diese Weise für komplexe Zahlen mögliche Anordnung ist aber nur eine sogenannte *Quasiordnung* (sogar eine *totale Quasiordnung*), aber das soll uns hier nicht weiter beschäftigen.
- Die Formel zur Berechnung des Betrags entspricht der Formel für die *Länge des Ortsvektors* zum Punkt *z* der Gaussschen Zahlenebene. Der Betrag ist also auch der *Abstand* der Zahl *z* vom Ursprung der Gaussschen Zahlenebene.
- Dies ist eine Erweiterung des Betrags einer reellen Zahl *x*, der ebenfalls den Abstand zu 0 angibt: $|x|_{komplex} = |x + 0 \cdot i| = \sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2} = |x|_{reell}$.
- Da alle Punkte mit gleichem Abstand vom Ursprung auf einem *Kreis* liegen, dessen Radius diesem Betrag entspricht, nennt man den Betrag manchmal auch *Radius*.

Zwei Beträge

Nach obiger Definition ist der Betrag der komplexen Zahl $z_1 = 4 + 3\,i$ gleich $|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \underline{\underline{5}}$. Das ist zugleich der *Abstand* des Punktes vom Ursprung der Gaussschen Zahlenebene.

Entsprechend würde also für $z_2 = 2 + 2\,i$ gelten: $|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$.

Beide Beträge sollten geometrisch einleuchtend sein!

Die nun folgenden Definitionen der Operationen mit komplexen Zahlen sind zunächst nur für komplexe Zahlen in der sogenannten *algebraischen Form* (auch **kartesische Form**, **Normalform**, **Komponentenform** genannt) formuliert.

Darunter versteht man die bisher verwendete Darstellung einer komplexen Zahl *z*, $z = a + b \cdot i$. *Algebraisch* heisst diese Darstellung, da nur die algebraischen Operationen plus und mal verwendet werden. Dass dies die *üblichste* Darstellung ist, spiegelt sich im ebenfalls gebräuchlichen Namen *Normalform*. Die Bezeichnung *kartesisch* kommt natürlich vom kartesischen Koordinatensystem, in welchem der Real- und Imaginärteil die Koordinaten darstellen. Und wenn man den Ortsvektor anstelle des Punktes anschaut, so sind diese die *Komponenten* des Vektors, deshalb gibt es auch noch diese Bezeichnung.

Später (ab *S.* 2.57) werden andere nützliche Darstellungsformen für komplexe Zahlen definiert, mit denen sich Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen leichter berechnen können, deshalb werden diese Operationen mit komplexen Zahlen hier noch nicht definiert. Und auch die *geometrische Deutung* der Multiplikation ist erst dann möglich.

2.5.4 Operationen mit komplexen Zahlen

Die Elementaroperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren müssen wegen des Permanenzprinzips auch für komplexe Zahlen definiert werden. Das Resultat einer solchen Verknüpfung ist wieder eine komplexe Zahl, in Spezialfällen eine reelle oder imaginäre Zahl (reelle und imaginäre Zahlen *sind ja Teilmengen der* komplexen Zahlen).

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Bei der Definition des Symbols i, genannt *imaginäre Einheit*, hiess es, dass man damit ganz normal rechnen dürfe „wie mit einer gewöhnlichen (reellen?) Variable“ (Permanenzprinzip!), es gilt einfach eine spezielle Eigenschaft: $i^2 = -1$.

Sind zwei komplexe Zahlen in *kartesischen Koordinaten* gegeben, so lassen sich Addition und Subtraktion wie folgt durchführen: Die Summe von $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ ist $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$, die Differenz ist $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$. Komplexe Zahlen in kartesischen Koordinaten werden also *komponentenweise* addiert bzw. subtrahiert, d.h. es werden *je die Real- und die Imaginärteile* addiert bzw. subtrahiert.

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten

Die Addition und die Subtraktion zweier komplexer Zahlen in kartesischen Koordinaten geschieht *komponentenweise:*

Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$

ist $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ und $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$.

Summe und Differenz unserer beiden komplexen Zahlen

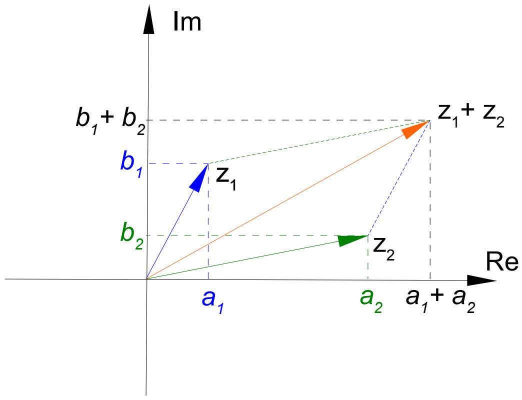
Die beiden komplexen Zahlen aus obigem Beispiel zum *Betrag* haben also folgende Summe bzw. Differenz:

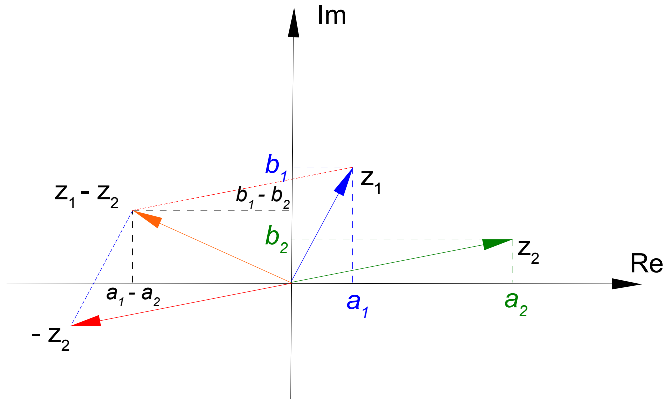
$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (2 + 2i) = \underline{\underline{6 + 5i}}$, $z_1 - z_2 = (4 + 3i) - (2 + 2i) = \underline{\underline{2 + i}}$

Auch *Vektoren* werden ja komponentenweise addiert bzw. subtrahiert, und komplexe Zahlen können in der gaussschen Zahlenebene als Vektoren dargestellt werden. Daraus ergibt sich folgende *geometrische Interpretation* der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen, welche für das Verständnis von *komplexen Abbildungen* noch sehr nützlich sein wird.

Geometrische Interpretation der Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen

Die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen in der gaussschen Zahlenebene entspricht der *Vektoraddition* bzw. *-subtraktion*.





Als geometrische *Abbildung* interpretiert, entspricht also die *Addition einer komplexen Zahl t zu einer Komplexen Zahl z* der ***Verschiebung (Translation)*** der Zahl *z* um den Vektor *t* . Der eine Summand wird also als abzubildender Punkt, der andere Summand als Translationsvektor aufgefasst.

Multiplikation komplexer Zahlen

Wieder sollen zwei komplexe Zahlen in *kartesischen Koordinaten* gegeben sein, und die Multiplikation wird nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln ausgeführt:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

Da aber speziell $i^2 = -1$ gilt, lässt sich dieser Term wieder in Form einer komplexen Zahl bringen: $a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$. Also:

Multiplikation von komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten

Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ ist $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$.

Bemerkungen:

- Die Multiplikation wird im Gegensatz zur Addition und Subtraktion also *nicht* komponentenweise durchgeführt! Es gilt also *nicht*: $\text{Re}(z_1 \cdot z_2) = \text{Re}(z_1) \cdot \text{Re}(z_2)$.
- Auch die *Multiplikation von Vektoren* (siehe *S.* 6.39) findet nicht komponentenweise statt. Überhaupt gibt es nicht „die Multiplikation“ für Vektoren. Es ist eine komplizierte Angelegenheit, sinnvolle Multiplikationen (es gibt mehrere!) für Vektoren zu definieren. Aber das ist ja, wie gerade gesehen, bei den komplexen Zahlen nicht anders.
- Diese (sehr spezielle) Multiplikation berücksichtigt die Multiplikation für die „reellen unter den komplexen“ Zahlen: Sind nämlich $z_1 = x_1 + 0i$ und $z_2 = x_2 + 0i$ speziell *reelle* Zahlen, so liefert die obige Formel einfach ihr reelles Produkt: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0) + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) i = x_1 x_2$. Dies hätte zwar ebenso gegolten, wenn man die Multiplikation *komponentenweise* definiert hätte, jedoch wäre dann umgekehrt das Produkt von zwei *rein imaginären* Zahlen falsch herausgekommen, wie man bereits beim einfachsten Beispiel des Produktes von *i* mit sich selber sieht: $i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i) \cdot (0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) i = -1$, entspricht der Definition von i, komponentenweise multipliziert wäre aber $i^2 = i$ herausgekommen.

- Die *geometrische Interpretation* der Multiplikation (und Division) wird erst im folgenden Abschnitt 2.5.2 gegeben. Zusammen mit dieser für Addition und Subtraktion wird es sogar möglich sein, *geometrische Abbildungen* mit Hilfe von komplexen Zahlen zu beschreiben, und geometrische Fragen algebraisch zu beantworten.

Division komplexer Zahlen

Will man zwei komplexe Zahlen in *kartesischen Koordinaten* dividieren, so entsteht ein algebraisches *Umformungsproblem*, das bereits bei Termen mit *Wurzeln* aufgetreten ist. Und zwar will man den Ausdruck $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ in die *Normalform* $c + d\,i$, $c, d \in \mathbb{R}$ bringen. Bei der Normalform eines *Wurzelterms*, bei dem im *Nenner* eine Summe mit Wurzeln stand, half die *dritte Binomische Formel*, und hier ist die Lösung genauso:

Erweitere den Bruch mit dem Nenner, aber entgegengesetztem Operationszeichen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\,i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$$

Genau wie beim Wurzelterm sorgt hier die *dritte binomische Formel* dafür, dass der Nenner keinen Imaginärteil enthält (dort: keine Wurzel enthält), da das Produkt des dritten Binoms nur Quadrate enthält: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
Jede Wurzel und jede imaginäre Einheit ist im Quadrat keine Wurzel mehr bzw. ist reell.

Division von komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten

Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ ist $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$.

Bemerkungen:

- Selbstverständlich führt man die Division nur bei einfachen Zahlen in dieser Form durch, es lohnt sich schnell einmal die Umwandlung in Polarform (siehe *S.* 2.57)! Weil es aber durchaus noch *möglich* ist, dies so durchzuführen, wird diese Definition in kartesischen Koordinaten noch gegeben.

Eine Bemerkung zu diesem „Trick“ des Erweiterns: Heisst der Nenner $z = a + b \cdot i$, so wird der Bruch (die Divisionsaufgabe) mit $a - b \cdot i$ erweitert. Dies ist wieder eine komplexe Zahle, und sie hat eine ganz spezielle Beziehung zur ursprünglichen Zahl *z.* Da sie auch in anderen Zusammenhängen eine Rolle spielt, erhält sie eine eigene Bezeichnung und Notation:

Konjugiert komplexe Zahl, Konjugation

Zwei komplexe Zahlen mit gleichem Realteil und entgegengesetzt gleichem Imaginärteil (welche sich also nur im *Vorzeichen* ihrer imaginären Einheit unterscheiden) heissen ***zueinander konjugiert komplex***.

Die Operation, welche aus einer komplexen Zahl ihre konjugiert komplexe Zahl macht (also der Vorzeichenwechsel des Imaginärteils der komplexen Zahl), heisst ***Konjugation*** und wird mit einem Querstrich über der Zahl geschrieben:

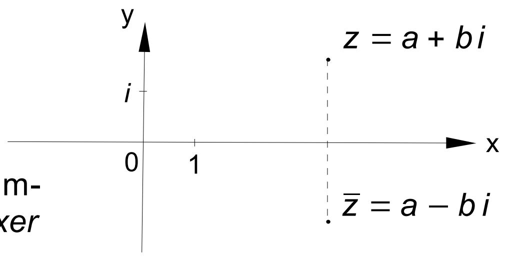
$$\overline{a + b \cdot i} = a - b \cdot i$$

$\bar{z} = a - b \cdot i$ ist die konjugiert-komplexe Zahl von $z = a + b \cdot i$.

Bemerkungen:

- Die Konjugation „macht sich selbst wieder rückgängig“: $\overline{\overline{z}} = z$ (leicht einzusehen!)
- Die *imaginäre Einheit* i war ja nur durch ihre Eigenschaft, $i^2 = -1$, definiert. Die Zahl $-i$ erfüllt diese Gleichung jedoch ebenso: $(-i)^2 = i^2 = -1$. *Welche* von beiden Lösungen der Gleichung $i^2 = -1$ man i und welche man $-i$ nennt, ist dabei willkürlich (und auch egal, beide Möglichkeiten ergeben dieselbe algebraische Struktur).
- Vergleiche mit dem *Vorzeichenwechsel* bei reellen Zahlen:
  $-x$ macht aus x die *Gegenzahl*, vertauscht also das Vorzeichen.
  Die Gegenzahl einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$, also $-z = -a - b \cdot i$, hat hingegen *sowohl* beim Real- *als auch* beim Imaginärteil ein vertauschtes Vorzeichen, es ist also *nicht dasselbe* wie die konjugiert-komplexe Zahl. Geometrisch entspricht dies einer *Punktspiegelung* am Ursprung.
- Die Konjugation entspricht geometrisch jedoch einer *Spiegelung* an der reellen Achse:

Konjugiert-komplexe Zahlen



Noch eine interessante Beobachtung zu Summe und Produkt zweier *konjugiert-komplexer* Zahlen:

Summe und Produkt zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist reell

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ und $z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) = |z|^2$

(in kartesischen Koordinaten: $z = a + bi \;\Rightarrow\; z + \overline{z} = 2a\,,\; z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$)

Beweis:

$$z + \overline{z} = (a + b\,i) + (a - b\,i) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$
$$z \cdot \overline{z} = (a + b\,i) \cdot (a - b\,i) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2 \qquad \blacksquare$$

Bemerkungen:

- Aus $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ folgt insbesondere $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ (der Radikand ist ja eben reell!), was allerdings nicht etwa eine einfachere Berechnung des Betrags wäre. Aber es entspricht auch der aus dem Reellen bekannten Identität (erfüllt somit auch das Permanenzprinzip!): $|x| = \sqrt{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
- Falls sich jemand fragt, was denn der *Quotient* zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist: Er ist nur in Spezialfällen reell oder imaginär, aber beides ist möglich.
- Bei Aufgaben kann „die Konjugation“ als Operation auch auf das Ergebnis einer andern Operation angewendet werden (vergleiche mit der Komplementmengenbildung). Z.B. bedeutet $\overline{z_1 + z_2}$, dass *zuerst* die beiden komplexen Zahlen z_1 und z_2 addiert und *dann* von der Summe die konjugiert-komplexe Zahl gebildet wird.
- Sowohl Summe als auch Produkt zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist also *reell!* Die Differenz ist dafür rein imaginär: $z - \overline{z} = (a + b\,i) - (a - b\,i) = 2b\,i = 2\,\mathrm{Im}(z)$.

Summe und Differenz lassen sich nach Real- bzw. Imaginärteil auflösen und es ergeben sich eigene „Formeln" für Real- und Imaginärteil (sind damit schon bewiesen):

Real- und Imaginärteil aus Summe bzw. Differenz mit der konjugiert-komplexen Zahl

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$

Noch je ein Beispiel zu Multiplikation und Division mit unseren Beispielzahlen:

Produkt und Quotient unserer beiden komplexen Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = (4+3i)\cdot(2+2i) = (8-6)+(8+6)\,i = \underline{\underline{2+14i}}\,,$$

$$z_1 : z_2 = \frac{4+3i}{2+2i} = \frac{(4+3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = = \frac{14-2i}{4+4} = \underline{\underline{\tfrac{7}{4} - \tfrac{1}{4}i}}$$

Wie „verträgt" sich die Konjugation mit den vier bisher besprochenen elementaren Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division?

Konjugation ist Verträglich mit Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\,, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\,.$$

Beweis: Simples Nachrechnen (wer Lust hat...).

Bemerkungen:

- „Verträglich" bedeutet, dass es nicht darauf ankommt, ob man *zuerst* die Operation anwendet und dann das *Resultat* konjugiert oder zuerst die Operanden einzeln konjugiert und erst dann die Operation anwendet.
- Eine interessante Konsequenz aus diesem Satz ist die Aussage, dass ein Polynom mit reellen Koeffizienten mit jeder komplexen Lösung auch die dazu konjugiert-komplexe Zahl als Lösung besitzt (siehe *S.* 3.21).
- Vergleiche mit dem Wurzelziehen: die Wurzel ist *nur mit Multiplikation und Division* verträglich (z.B. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$), *nicht* aber mit *Addition* oder *Subtraktion*.
- Ebenso beim Potenzieren: zwar gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, aber für die Potenz einer Summe braucht es die binomischen Formeln!
- Und eine ganz unverträgliche Operation ist der *Logarithmus.* Der Logarithmus eines *Produktes* zum Beispiel kann zwar mit den Logarithmen der einzelnen Faktoren berechnet werden, ist dann aber die *Summe* dieser Logarithmen: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.

Wie steht es eigentlich um die Verträglichkeit des oben definierten Betrags mit den andern Operationen? Er ist nur mit Multiplikation und Division verträglich (siehe folgender Satz), bei der Addition oder Subtraktion gilt aber immerhin die Dreiecksungleichung (siehe dann den Satz nach dem folgenden):

Der Betrag ist Verträglich mit Multiplikation und Division

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,, \qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Beweis: Folgt aus der Multiplikation bzw. Division komplexer Zahlen in *Polarform* (siehe *S.* 2.59/60). ■

Die Dreiecksungleichung für den Betrag einer Summe

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Beweis: Dies liesse sich in kartesischen Koordinaten nachrechnen, aber es wäre eine lange Rechnung und insbesondere mehrere *Fallunterscheidungen* nötig. Das ist zwar eine Standardmethode für das Nachrechnen von Ungleichungen (siehe [324]), aber hier gibt es einen einfacheren Weg: Oben wurde für das *Produkt* einer komplexen Zahl und ihrer Konjugiert-komplexen gezeigt: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Die Ungleichung, die wir zeigen wollen, hat auf beiden Seiten *positive* Zahlen, daher stimmt sie *genau dann, wenn* auch die quadrierte Gleichung stimmt (für positive Zahlen a, b gilt: $a \le b \;\Leftrightarrow\; a^2 \le b^2$). Also:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \quad \Leftrightarrow \quad |z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

Auf der linken Seite: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$

Auf der rechten Seite: $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}\,, \quad |z_2|^2 = z_2\overline{z_2}\,, \quad 2|z_1||z_2| = 2|z_1\, z_2| = 2|z_1\, \overline{z_2}|$

$$\Leftrightarrow \quad z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \le z_1\overline{z_1} + 2|z_1\,\overline{z_2}| + z_2\overline{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \le 2|z_1\,\overline{z_2}|$$

$\Leftrightarrow \quad z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \le 2|z_1\,\overline{z_2}| \quad \Leftrightarrow \quad z + \overline{z} \le 2|z|$ (Substitution: $z = z_1\overline{z_2}$)

An der gleichen Stelle oben haben wurde für die *Summe* einer komplexen Zahl und ihrer Konjugiert-komplexen gezeigt: $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Also:

$\Leftrightarrow\; 2\,\mathrm{Re}(z) \le 2|z| \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(z) \le |z|$. In kartesischen Koordinaten ($z = a + b\,i$):
$\Leftrightarrow\; a \le \sqrt{a^2 + b^2}$. Das stimmt aber, weil $b^2 \ge 0$ ist und die Wurzel monoton. ■

Bemerkung:

- Also erfüllen die komplexen Zahlen immerhin diese Eigenschaft der reellen Zahlen (im Gegensatz etwa dazu, dass sie sich nicht ordnen lassen!).

Das Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen wird auf *S.* 2.61/62, erklärt.

In der folgenden Zusammenstellung aller bisher besprochenen Operationen sind neben den zweistelligen Operationen (welche zwei komplexe Zahlen verknüpfen, man spricht auch von binären oder dyadischen Verknüpfungen oder Operationen) auch die oben angegebenen Funktionen erwähnt, welche als Argument nur eine komplexe Zahl brauchen. Obwohl hier also keine Verknüpfung von zwei Zahlen stattfindet, spricht man manchmal dennoch von Operationen, sie sind einfach einstellig, man sagt auch *unär* oder monadisch.

Komplexe Zahlen in Normalform

Definition: $i^2 = -1\,,\quad \mathbb{C} = \{\, a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$

Zweistellige Operationen: $z_1 = a_1 + b_1 i\,,\quad z_2 = a_2 + b_2 i$

Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$

Komponentenweise

Subtraktion: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$

Komponentenweise

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$

Ausmultiplizieren, sortieren

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$

Mit dem Konjugierten des Nenners erweitern

Einstellige Operationen: $z = a + b\,i$

Realteil: $\mathrm{Re}(z) = a$

Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = b$

Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pythagoras

Konjugierte: $\overline{z} = a - b\,i$

Vorzeichen des Imaginärteils wechseln

Reziproke: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\,i$

Eigenschaften und Rechenregeln für die Konjugation

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)\,, \qquad z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) = |z|^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Eigenschaften und Rechenregeln für den Betrag

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Dreiecksungleichung