

Übungsaufgaben M 17

Zu 1) - 3): Löse die Gleichung in der Grundmenge \mathbb{C} .

- 1) a) $z^2 = 4$ b) $z^2 = -4$ c) $z^2 = 3$ d) $z^2 = -3$
 2) a) $z^2 - 3z + 2 = 0$ b) $z^2 - 4z + 13 = 0$ c) $2z^2 + 32 = 0$
 3) a) $z^2 + 4z + 5 = 0$ b) $z^2 + 4z - 5 = 0$ c) $81z^2 + 25 = 0$

Zu 4) - 5): Ist die Aussage wahr oder falsch?

- 4) a) 2 ist eine reelle Zahl. b) 2 ist eine komplexe Zahl.
 c) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl. d) $3 + \frac{1}{2}i$ ist eine reelle Zahl.
 5) a) $-\sqrt{3}i$ ist eine rein imaginäre Zahl. b) π ist eine komplexe Zahl.
 c) $-2 - 3i$ ist keine reelle Zahl. d) $\sqrt{17}$ ist eine reelle Zahl.

Zu 6) -7): Suche die erste der Grundmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , in der die Gleichung erfüllbar ist, und gib für diesen Fall die Lösungsmenge L an.

- 6) a) $2z + 1 = 0$ b) $z + 2 = 0$ c) $z - 2 = 0$ d) $z^2 - 2 = 0$
 7) a) $3z - 1 = 0$ b) $3z^2 - 12 = 0$ c) $z^2 - 12 = 0$ d) $3z^2 + 12 = 0$

Zu 8) - 10): Löse in der Grundmenge: a) \mathbb{N} , b) \mathbb{Z} , c) \mathbb{Q} , d) \mathbb{R} , e) \mathbb{C} .

- 8) $(2z^2 + 32)(2z^2 - 32) = 0$
 9) $(z^2 - 5)(z^2 + 5) = 0$
 10) $(z - 2)(z + 3)(3z - 2)(z^2 - 2) = 0$
 11) Jemand schreibt $i = \sqrt{-1}$ und formt um: $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = 1$. Wo steckt der Fehler?

zu 12) -13): Die in \mathbb{R} unerfüllbare Gleichung $z^2 = -1$ wird erfüllbar, indem man die Zahl i einführt und die Menge \mathbb{R} zur Menge \mathbb{C} erweitert. Selbstverständlich kann nicht in jedem Fall ein in einer Grundmenge fehlendes Objekt einfach dadurch verwirklicht werden, dass man es mit einem Namen versieht und als Element einer geeigneten Obermenge auffasst.

- 12) Es sei j eine Zahl, für die $0 \cdot j = 1$ gilt. Schreibe den Term $(0+0) \cdot j$ auf zwei verschiedene Arten und zeige so, dass ein Widerspruch entsteht.
 13) Es sei j eine Zahl, für die $\log_2 0 = j$ gilt. Forme den Term $\log_2(2 \cdot 0)$ mit den Logarithmengesetzen um und zeige so, dass ein Widerspruch entsteht.

Alle Ergebnisse sind in Normalform $x + iy$ anzugeben!

Addition, Subtraktion, Multiplikation

- 14) a) $(8 + 2i) + (7 + 3i)$ b) $(11 - 15i) + (-3 + 8i)$
 c) $(1 + 10i) - (5 - 13i)$ d) $(-3 + i) - (-2 - i)$
- 15) a) $8 \cdot 5i$ b) $8i \cdot 5i$ c) $5(6 - 9i)$
 d) $(-7 - 12i)5i$ e) $(8 + 2i)(7 + 3i)$ f) $(11 - 15i)(-3 + 8i)$
- 16) a) $98 - (99 - 100i)$ b) $25i - (-8 + i)$ c) $-i(14 + 5i)$
 d) $(13 + 17i)(13 - 17i)$ e) $(-3 - i)(4 - 3i)$ f) $(7 + i)^2$

Zu 17) - 18): $z_1 = 7 - 5i, z_2 = 2 + i, z_3 = -5 + 2i, z_4 = -10 - 3i, z_5 = 8, z_6 = 8i$

- 17) a) $z_1 - z_3 - z_5$ b) $z_2 + (z_3 - z_4)$ c) $z_1 z_3 z_4$
 d) $z_1^2 + z_2^2$ e) $\operatorname{Re}(z_1 + 4z_2)$ f) $\operatorname{Im}(z_2^2 z_4)$
- 18) a) $z_5 - (z_6 - z_1)$ b) $z_3^2 + z_4^2$ c) $z_2(z_4 - z_6)$
 d) $iz_4 - z_3 z_6$ e) $\operatorname{Re}(z_1^2 z_3)$ f) $\operatorname{Im}(2z_2 + 3z_3)$
- 19) $z_1 = 4 - \frac{2}{3}i, z_2 = -3 - \frac{4}{5}i, z_3 = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3}i$
 a) $z_2 - z_3$ b) $z_1 z_2$
 c) $z_1 z_3 + z_2 z_3$ d) $z_1 z_2^2$
- 20) $z_1 = \sqrt{5} + 2i, z_2 = \sqrt{5} - 2i, z_3 = 3 - \sqrt{2}i, z_4 = 3 + \sqrt{2}i$
 a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 z_3$
 c) $(z_4 - z_1) + z_3$ d) $z_1(z_2 + z_3)$

Division, konjugierte Zahl

- 21) a) $15i : 3$ b) $15 : 5i$ c) $30 : (-12i)$
 d) $(4 + 6i) : 2$ e) $(6 - 8i) : 4i$ f) $(-5 - 10i) : (-5)$
- 22) a) $(-24i) : 16$ b) $(-40i) : 25i$ c) $8i : (-12i)$
 d) $(-100) : 20i$ e) $(-12 + 15i) : (-6i)$ f) $(18 + 28i) : 21i$

- 23) $z_1 = 4 + 2i, z_2 = 2 + 4i, z_3 = -2 + 4i, z_4 = -4 + 2i$
 $z_5 = -4 - 2i, z_6 = -2 - 4i, z_7 = 2 - 4i, z_8 = 4 - 2i$
 a) Gib alle Paare von konjugierten Zahlen an.
 b) Gib alle Paare von Gegenzahlen an.

- 24) a) $\frac{5 + 3i}{2 + 4i}$ b) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$ c) $\frac{56 + 33i}{12 - 5i}$ d) $\frac{13 - 5i}{1 - i}$

- 25) Berechne z^{-1} :
 a) $z = 2 + i$ b) $z = 4 + 3i$ c) $z = -24 - 7i$ d) $z = -1 - 2i$

- 26) Zur Zahl z sollen $-z, \bar{z}$ und z^{-1} berechnet werden.
 a) $z = 12 - 5i$ b) $z = 3 + i$ c) $z = \frac{5}{3}i$ d) $z = -\frac{3}{2}$

- 27) $z_1 = 39 + 65i, z_2 = 21 + i, z_3 = 3 + 2i, z_4 = 3 - 4i$
 a) $z_1 : z_2$ b) $z_2 : z_3$ c) $z_1 : z_3$ d) $z_2 : z_4$

28) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3$, $z_3 = 5 + 5i$, $z_4 = -8 - 6i$

a) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ b) $\frac{z_1 + \bar{z}_2}{2z_4}$ c) $\frac{z_3 - \bar{z}_3}{z_1 \bar{z}_1}$ d) $\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$
 e) $\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_3}{z_4}$ f) $z_3 z_4 + \frac{500i}{z_3 z_4}$

29) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = -3 + 5i$

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ b) $\frac{\operatorname{Re}(z_1)}{\operatorname{Re}(z_2)}$ c) $\operatorname{Im}\frac{z_2}{z_1 - z_2}$ d) $\frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Re}(z_1)}$

30) a) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}i}{\frac{1}{2} + \frac{7}{3}i}$ b) $\frac{\frac{23}{9} - \frac{29}{72}i}{\frac{1}{2} + \frac{11}{12}i}$ c) $\frac{7}{\sqrt{2} - \sqrt{5}i}$ d) $\frac{4 + \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - 4i}$

31) a) $\frac{\frac{7}{6} + \frac{5}{18}i}{\frac{4}{9} - \frac{2}{3}i}$ b) $\frac{\frac{59}{15} + i}{\frac{4}{5} - \frac{4}{3}i}$ c) $\frac{4i}{\sqrt{3} + \sqrt{5}i}$ d) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}$

Zu 32), 33): $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

32) a) $(a + bi) + (c + di)$ b) $(a - 2bi) - \overline{3a + 4ci}$ c) $(7a + 3bi)(4c - 5di)$ d) $\frac{a + bi}{c - di}$
 e) $(b + di)^{-1}$ f) $i(a + bi) + \frac{1}{i}(a - bi)$

33) a) $ai(2b + 3ci) - \frac{a}{i}(2b - 3ci)$ b) $\overline{(b - ci)}(b - ci)^{-1}$
 c) $(3a + (-b + 4c)i)(3a + (b - 4c)i)$ d) $\frac{a + bi}{3c + di} - \frac{a - bi}{3c - di}$
 e) $\frac{(4a + ci)(a + bi) + (-4a + ci)(a - bi)}{(4b + c)i}$
 f) $ai + \frac{\overline{1}}{a}i + \frac{a}{i} + \frac{i}{a}$

Potenzen

Zu 34), 35): Berechne i^n :

34) a) für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
 b) für $n = -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8$

35) a) für $n = 45, 60, 103, 202$ b) für $n = -27, -50, -61, -100$

36) Für welche $n \in \mathbb{Z}$ gilt: a) $i^n = -1$ b) $i^n = -i$

37) Berechne $x, y \in \mathbb{R}$: a) $(3 + 4i)^2 = x + iy$ b) $(4 - 6i)^3 = x + iy$

Übungsaufgaben M 17 Lösungen

- 1) a) $\{2, -2\}$ b) $\{2i, -2i\}$ c) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ d) $\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$
- 2) a) $\{1, 2\}$ b) $\{2 + 3i, 2 - 3i\}$ c) $\{4i, -4i\}$
- 3) a) $\{-2 + i, -2 - i\}$ b) $\{-5, 1\}$ c) $\{-\frac{5}{9}i, \frac{5}{9}i\}$
- 4) a) wahr b) wahr c) falsch d) falsch
- 5) a) wahr b) wahr c) wahr d) wahr
- 6) a) $\mathbb{Q}, \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $\mathbb{Z}, \{-2\}$ c) $\mathbb{N}, \{2\}$ d) $\mathbb{R}, \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- 7) a) $\mathbb{Q}, \left\{\frac{1}{3}\right\}$ b) $\mathbb{Z}, \{2, -2\}$ c) $\mathbb{R}, \{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$ d) $\mathbb{C}, \{2i, -2i\}$
- 8) a) $\{4\}$ b) c) d) $\{4, -4\}$ e) $\{4, -4, 4i, -4i\}$
- 9) a) b) c) $\{ \}$ d) $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ e) $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$
- 10) a) $\{2\}$ b) $\{2, -3\}$ c) $\{2, -3, \frac{2}{3}\}$ d) e) $\{2, -3, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- 11) Die Potenzgesetze gelten bei gebrochenen Exponenten nur für positive Basen. Vgl. Kap. 13.
- 12) 1. Art: $(0 + 0) \cdot j = 0 \cdot j = 1$ Definition
 2. Art: $(0 + 0) \cdot j = 0 \cdot j + 0 \cdot j = 1 + 1 = 2$ Distributivgesetz
 $\Rightarrow 1 = 2$ Widerspruch
- 13) 1. Art: $\log_2(2 \cdot 0) = \log_2(0) = j$ Definition
 2. Art: $\log_2(2 \cdot 0) = \log_2 2 + \log_2 0 = 1 + j$ Logarithmengesetz
 $\Rightarrow j = 1 + j \Rightarrow 1 = 0$ Widerspruch
- 14) a) $15 + 5i$ b) $8 - 7i$ c) $-4 + 23i$ d) $-1 + 2i$
- 15) a) $40i$ b) -40 c) $30 - 45i$ d) $60 - 35i$ e) $50 + 38i$ f) $87 + 133i$
- 16) a) $-1 + 100i$ b) $8 + 24i$ c) $5 - 14i$ d) 458 e) $-15 + 5i$ f) $48 + 14i$
- 17) a) $4 - 7i$ b) $7 + 6i$ c) $367 - 315i$ d) $27 - 66i$
 e) 15 f) -49
- 18) a) $15 - 13i$ b) $112 + 40i$ c) $-9 - 32i$ d) $19 + 30i$
 e) 20 f) 8
- 19) a) $-\frac{13}{5} - \frac{47}{15}i$ b) $-\frac{188}{15} - \frac{6}{5}i$ c) $\frac{136}{45} + \frac{73}{25}i$ d) $\frac{916}{25} + \frac{1022}{75}i$
- 20) a) $2\sqrt{5}$ b) $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) + (6 - \sqrt{10})i$
 c) $(6 - \sqrt{5}) - 2i$ d) $(9 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) + (6 - \sqrt{10})i$
- 21) a) $5i$ b) $-3i$ c) $\frac{5}{2}i$ d) $2 + 3i$ e) $-2 - \frac{3}{2}i$ f) $1 + 2i$
- 22) a) $-\frac{3}{2}i$ b) $-\frac{8}{5}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $5i$ e) $-\frac{5}{2} - 2i$ f) $\frac{4}{3} - \frac{6}{7}i$
- 23) a) $(z_1, z_8), (z_2, z_7), (z_3, z_6), (z_4, z_5)$ b) $(z_1, z_5), (z_2, z_6), (z_3, z_7), (z_4, z_8)$
- 24) a) $\frac{11}{10} - \frac{7}{10}i$ b) $12 - 5i$ c) $3 + 4i$ d) $9 + 4i$
- 25) a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ b) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$ c) $-\frac{24}{625} + \frac{7}{625}i$ d) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
- 26) a) $-12 + 5i, 12 + 5i, \frac{12}{169} + \frac{5}{169}i$ b) $-3 - i, 3 - i, \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$
 c) $-\frac{5}{3}i, -\frac{5}{3}i, -\frac{3}{5}i$ d) $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$
- 27) a) $2 + 3i$ b) $5 - 3i$ c) $19 + 9i$ d) $\frac{59}{25} + \frac{87}{25}i$
- 28) a) $-\frac{9}{10} - \frac{3}{10}i$ b) $\frac{1}{50} - \frac{7}{50}i$ c) $2i$ d) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i$
 e) $\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i$ f) $-17 - 71i$
- 29) a) $-\frac{5}{34}$ b) $-\frac{5}{3}$ c) $\frac{31}{73}$ d) $\frac{5}{7}$
- 30) a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ b) $\frac{5}{6} - \frac{7}{3}i$ c) $\sqrt{2} + \sqrt{5}i$ d) i
- 31) a) $\frac{27}{52} + \frac{73}{52}i$ b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}i$
- 32) a) $(a + c) + (b + d)i$ b) $(-2a) + (-2b + 4c)i$
 c) $(28ac + 15bd) + (-35ad + 12bc)i$ d) $\frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}i$
 e) $\frac{b}{b^2 + d^2} - \frac{d}{b^2 + d^2}i$ f) $-2b$
- 33) a) $4abi$ b) $\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2}i$
 c) $9a^2 + b^2 - 8bc + 16c^2$ d) $\frac{-2ad + 6bc}{9c^2 + d^2}i$
 e) $2a$ f) 0
- 34) a) $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1$ b) $-i, -1, i, 1, -i, -1, i, 1$
- 35) a) $i, 1, -i, -1$ b) $i, -1, -i, 1$
- 36) a) $n = 4m + 2$ und $m \in \mathbb{Z}$ b) $n = 4m + 3$ und $m \in \mathbb{Z}$
- 37) a) $x = -7, y = 24$ b) $x = -368, y = -72$