Lösung Aufgabe 194 : Glasquader

©Björn Graneli, ExamPrep 2017

Glasquader

In einer Ebene parallel zu zweien Seiten eines Quaders aus Glas mit Brechungsindex $n = 1,25$, trifft ein Lichtstrahl aus der Luft schräg auf die Seite (A), siehe Abb.(1). Der Strahl wird an der Fläche (A) gebrochen und in den Quaders transmittiert, bis er auf die Seite (B) unter dem Winkel für Totalreflexion einfällt.

a) Berechnen Sie den Einfallswinkel an der Seite (A).

b) Wo wird der Lichtstrahl zum ersten Mal wieder aus dem Quader hinaustreten und welcher Winkel schliesst er mit dem Lot zur Fläche ein ?

c) Welchen Winkel bildet der heraustretende Strahl mit dem ursprünglich auf Seite (A) einfallenden Strahl ?

d) Skizzieren Sie den Strahlengang massgerecht, mit sämtlichen möglichen Strahlen, bis der Strahl sich selbst schneidet.

e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Strahlen ?

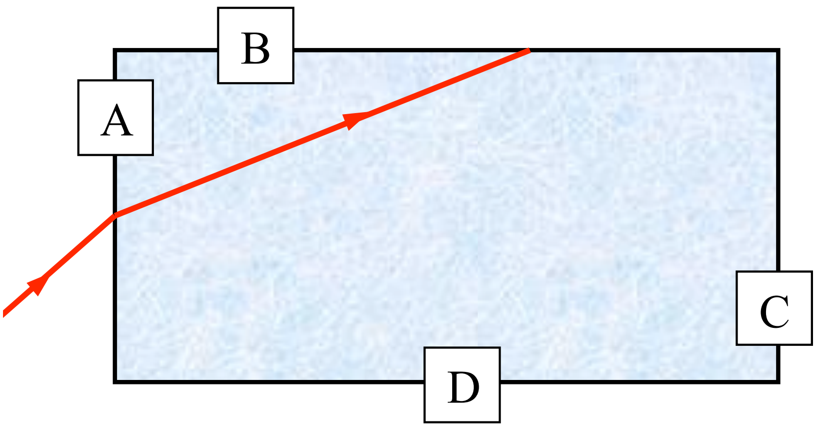

Abbildung 1: Der Glasquader mit unvollständigem Strahlengang.

Lösung:

In der Aufgabe brauchen wir mehrmals das Gesetz von Snellius. Aus der Formelsammlung S.167:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) \; ;$$

Wir werden in der Lösung dieser Aufgabe nicht dem üblichen Gebrauch folgen, nach dem die Grössen, die zum Medium gehören wo der Strahl einfällt, mit Index (1) bezeichnet werden, das Medium wo der Strahl transmittiert wird mit Index (2). Grund dafür ist, dass wir mehrere Durchgänge über die Grenzflächen betrachten müssen. Wir geben den Brechungsindex für Luft die Bezeichnung n_{L}, den Brechungsindex des Glasquaders n_{G}. Der Einfallswinkel an der Fläche (A) heisst α_{L}, der Brechungswinkel α_{G}. Alle Winkel von Strahlen die aus der Luft kommen oder in de Luft gehen bekommen Index (L); die Winkel von Strahlen im Quader bekommen Index (G). Ein Grenzwinkel für Totalreflexion wird mit Index (T) gekennzeichnet.

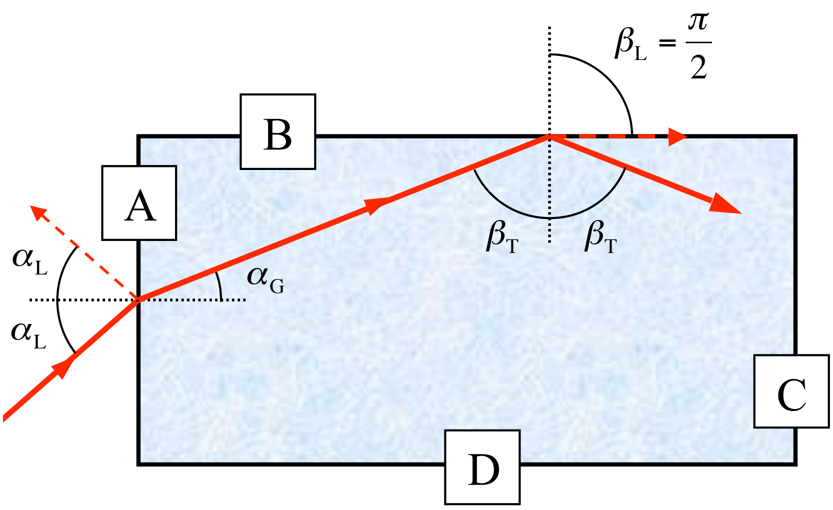

Abbildung 2: Der Weg der Strahl bis Totalreflexion an Seite (B).

a) An der Frontfläche (A) kommt das Licht aus einem optisch dünneren Medium, Luft, $n_{\mathrm{L}} \approx 1,00$, und wird durch Brechung ins optisch dichtere Medium transmittiert, $n_{\mathrm{G}} = 1,25$. Der Strahl wird an der Oberfläche auch reflektiert, aber wir interessieren uns nicht dafür.

   Eine Bedingung für den Einfallswinkel an der Fläche (A) bekommen wir durch die Forderung, dass der nach der Brechung transmittierte Strahl, an der horizontalen Fläche (B) unter dem Grenzwinkel β_{T} für Totalreflexion einfalle, d.h. der Einfallswinkel gegen den Lot ist der Grenzwinkel, und der Brechungswinkel ist $\beta_{\mathrm{L}} = \frac{\pi}{2}$; es wird kein Strahl in die Luft transmittiert, oder genauer gesagt, der transmittierte strahl liegt in der Grenzfläche des Würfels zur Luft.

$$n_{\mathrm{G}} \sin(\beta_{\mathrm{T}}) = n_{\mathrm{L}} \sin(\beta_{\mathrm{L}}) \quad \Rightarrow$$

$$\sin(\beta_{\mathrm{T}}) = \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{G}}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\beta_{\mathrm{T}} = \arcsin\left(\frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{G}}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\beta_{\mathrm{T}} = \arcsin\left(\frac{1,0}{1,25}\right) =$$

$$= \arcsin(0,8) = 0,92730\,\mathrm{rad} \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\beta_{\mathrm{T}} = \underline{53,13^\circ}\ ; \tag{2}$$

Damit können wir den Winkel α_{L} des auf der Seite (A) des Würfels einfallenden Strahls bestimmen. Das Gesetz von SNELLIUS gibt für die Brechung an der Fläche (A):

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \sin(\alpha_{\mathrm{G}})\ ; \tag{3}$$

Der rechtwinkelige Dreieck, gebildet vom Strahl und den beiden Lotlinien der Seiten (A) und (B), hat die Winkelsumme:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \beta_{\mathrm{T}} + \alpha_{\mathrm{G}}\ ;$$

Wir lösen den Winkel α_{G}, den wir in Gl.(3) ersetzen möchten:

$$\alpha_{\mathrm{G}} = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}}\ ; \tag{5}$$

und setzen in Gl.(3) ein:

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \sin(\alpha_{\mathrm{G}}) \quad \Rightarrow$$

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \cos(\beta_{\mathrm{T}})\ ; \tag{6}$$

Wir bekommen mit dem Resultat Gl.(1):

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \cos(\beta_{\mathrm{T}}) =$$

$$= n_{\mathrm{G}} \cos(\arcsin(0,8)) =$$

$$= (1,25) \cos(0,92730) = (1,25)(0,60000) \quad \Rightarrow$$

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = 0,75000 \; ;$$

Mit dem gegebenen Wert $n_{\mathrm{L}} = 1,00$ lösen wir den gesuchten Einfallswinkel auf Seite (A):

$$\alpha_{\mathrm{L}} = \arcsin(0,75000) = 0,84806 \,\mathrm{rad} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_{\mathrm{L}} = \underline{\underline{48,59^\circ}} \; ; \tag{7}$$

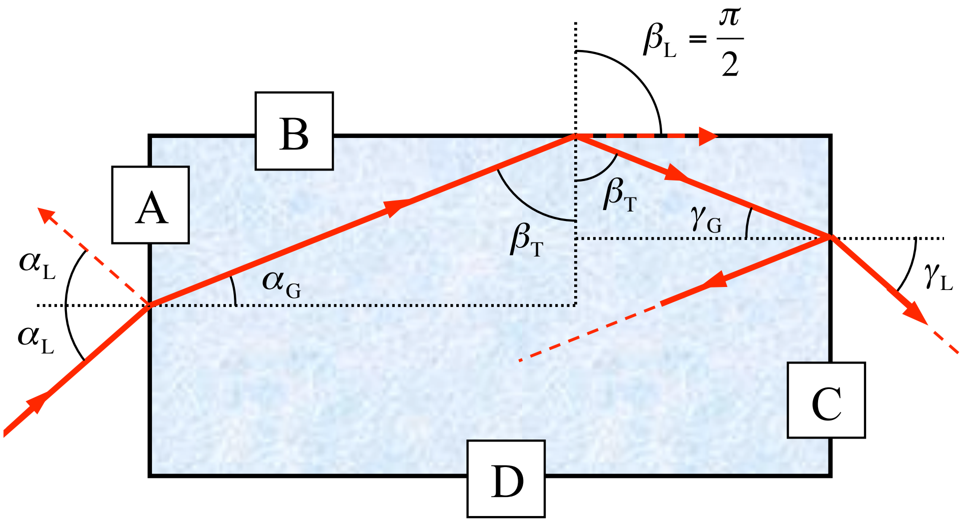

Abbildung 3: Der Strahl im Quader entkommt an der Seite (C) das erste Mal in die Luft.

b) Der in den Quader bei (B) zurückreflektierte Strahl trifft demnächst auf Seite (C) des Quaders, siehe Abb.3. Der Einfallswinkel sei γ_{G}. Der rechtwinkelige Dreieck, gebildet vom Strahl zwischen (B) und (C) und den beiden Einfallslote, hat die Winkelsumme π:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \beta_{\mathrm{T}} + \gamma_{\mathrm{G}} \; ; \tag{8}$$

Wir lösen den gesuchten Einfallswinkel auf die Seite (C):

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathrm{G}} &= \pi - \frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}} = \frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}} = \\ &= \frac{\pi}{2} - 0,92730 = 0,64350\,\mathrm{rad} = \quad \Rightarrow \\ \gamma_{\mathrm{G}} &= \underline{36,87^\circ}\ ;\end{aligned} \tag{9}$$

Dieser Winkel ist kleiner als der vorhin berechnete Grenzwinkel für Totalreflexion, $\beta_{\mathrm{T}} = 53,13^\circ$, Gl.(2), weswegen es an der Seite (C) einen transmittierten Strahl und einen reflektierten Strahl gibt. Der Strahl wird also zum ersten mal an Seite (C) aus dem Quader heraustreten. Den Winkel zum Lot des transmittierten Strahls, γ_{L}, berechnen wir mit dem Gesetz von Snellius:

$$\begin{aligned}n_{\mathrm{G}} \sin(\gamma_{\mathrm{G}}) &= n_{\mathrm{L}} \sin(\gamma_{\mathrm{L}}) \quad \Rightarrow \\ \sin(\gamma_{\mathrm{L}}) &= \frac{n_{\mathrm{G}}}{n_{\mathrm{L}}} \sin(\gamma_{\mathrm{G}})\ ;\end{aligned}$$

Wir setzen die Brechungsindizes ein, sowie den Winkel γ_{G} aus Gl.(9):

$$\begin{aligned}\sin(\gamma_{\mathrm{L}}) &= \frac{1,25}{1,0} \sin(0,64350) = \\ &= (1,25)(0,600) = 0,75\ ;\end{aligned}$$

und lösen den Winkel des transmittierten Strahls:

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \arcsin(0,75) = 0,84806\,\mathrm{rad} = \underline{\underline{48,59^\circ}}\ ; \tag{10}$$

Antwort: Der Strahl tritt zum ersten mal an Seite (C) aus dem Quader heraus. Der Winkel zum Lot ist $\gamma_{\mathrm{L}} = 48,59^\circ$.

c) Wir möchten nun einen Zusammenhang zwischen den unter dem Winkel γ_{L} austretenden Strahl und dem ursprünglich, unter dem Winkel α_{L} in den Würfel eintretenden Strahl herstellen.

Oben haben wir in Gl.(6) einen Zusammenhang zwischen dem Winkel α_{L} und β_{T} gefunden:

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{G}} \cos(\beta_{\mathrm{T}})\ ; \tag{11}$$

Nun stellen wir für die Brechung in Seite (C) das Gesetz von Snellius auf:

$$n_{\mathrm{G}} \sin(\gamma_{\mathrm{G}}) = n_{\mathrm{L}} \sin(\gamma_{\mathrm{L}})\ ; \tag{12}$$

Die Winkelsumme in Gl.(8) haben wir oben gefunden:

$$\gamma_{\mathrm{G}} = \frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}} \ ;$$

Wir setzen in Gl.(12) und erhalten:

$$n_{\mathrm{G}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_{\mathrm{T}}\right) = n_{\mathrm{L}} \sin(\gamma_{\mathrm{L}}) \quad \Rightarrow$$

$$n_{\mathrm{G}} \cos(\beta_{\mathrm{T}}) = n_{\mathrm{L}} \sin(\gamma_{\mathrm{L}}) \ ; \tag{13}$$

Wir kombinieren mit Gl.(11) und erhalten:

$$n_{\mathrm{L}} \sin(\alpha_{\mathrm{L}}) = n_{\mathrm{L}} \sin(\gamma_{\mathrm{L}}) \ ;$$

Es folgt, abgesehen von beliebige multiplen von 2π:

$$\alpha_{\mathrm{L}} = \gamma_{\mathrm{L}} \ ; \tag{14}$$

Antwort: Der bei (C) aus dem Quader austretenden Strahl, bildet mit dem ursprünglich auf die Seite (A) einfallende Strahl den gleichen Winkel zum Lot.

Auf dieses Resultat hatten wir numerisch einen Hinweis mit dem Resultaten in Gl.(7) und Gl.(10) gefunden.

d) In der Abb.4 ist der vollständige Strahlengang skizziert. Durch eine Aufteilung in Dreiecken, sieht man ein, dass der Einfallswinkel auf Seite (D) gleich dem Einfallswinkel auf Seite (B) sein muss, also gleich dem Grenzwinkel für Totalreflexion, $\beta_{\mathrm{T}} = \delta_{\mathrm{T}}$.

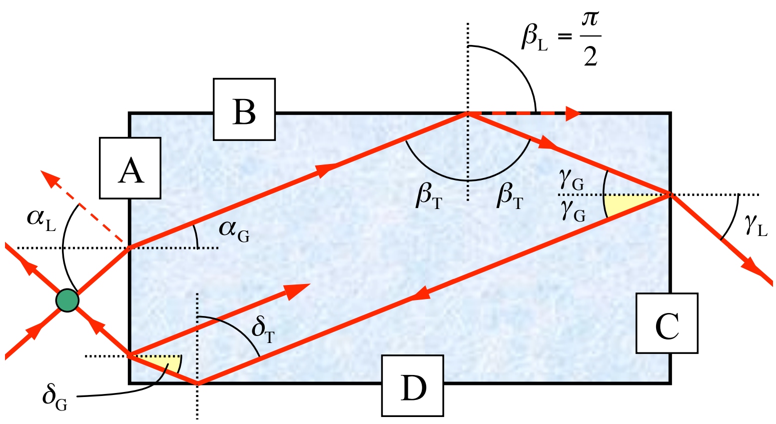

Abbildung 4: Der Glasquader mit reflektierten und gebrochenen Strahlen, bis sie sich vor Seite (A) schneiden.

Eine weitere Aufteilung in ähnlichen Dreiecken zeigt, dass der einfallende Strahl auf Seite (A) im Inneren des Quaders, in einem reflektierten und einem gebrochenen Strahl aufgeteilt wird, so wie an der Seite (C) vorhin. Mit geeigneten Dreiecken sieht man auch, dass $\gamma_{\mathrm{G}} = \delta_{\mathrm{G}}$.

e) Wir bestimmen den Winkel zwischen den beiden Strahlen in Abb.5, wo ein vergrösserter Ausschnitt aus Abb.4 zu sehen ist.

Die Winkel der Beiden Strahlen zum Lot sind α_{L} und γ_{L}, siehe Abb.5. Die beiden Wechselwinkel bilden zusammen den Winkel φ, unter welchen sich die Strahlen schneiden.

$$\varphi = \alpha_{\text{L}} + \gamma_{\text{L}} \ ;$$

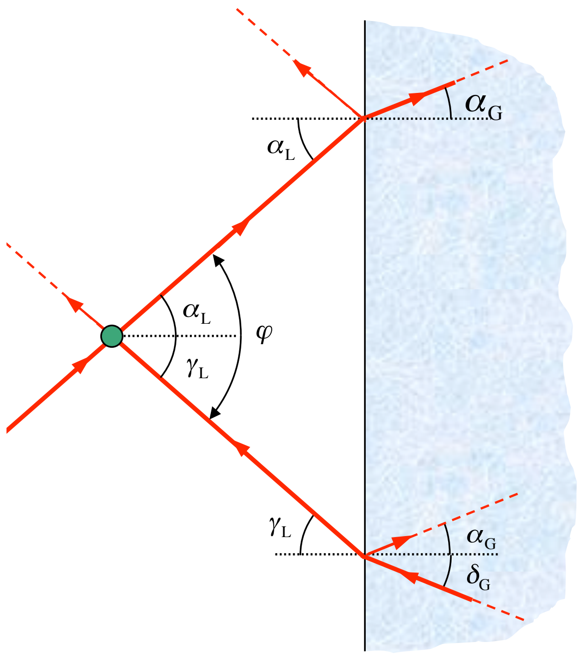

Abbildung 5: Der auf dem Quader einfallende und der austretende Strahl schneiden sich im grünen Punkt. Ausschnitt aus Abb.4.

Oben hatten wir in Gl.(14) gefunden:

$$\alpha_{\text{L}} = \gamma_{\text{L}} \ ;$$

so dass wir nach dem Resultat Gl.(7) hier erhalten;

$$\varphi = 2\alpha_{\text{L}} = 2(48,59) = 97,18^\circ \ ;$$

Als Winkel zwischen zwei Linien würde man den Scheitelwinkel angeben, also den Winkel kleiner als 90°:

$$\pi - \varphi = 180 - 97,18 = \underline{\underline{82,82^\circ}} \ ;$$